点集拓扑研究与广义数

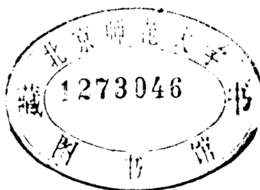
王成堂等 著

西北大学出版社

点集拓扑研究与广义数

王 戊 堂 等 著

(中国科学院科学基金资助的课题)



西北大学出版社

内 容 提 要

这是一本数学论文集，汇集了我校王成堂教授等人在点集拓扑和广义数研究方面的主要成果。二十多年来，王成堂在这些领域的研究中均有重大建树，其中有的还带有开创性质，在国内外学术界有较大影响。本论文集对数学教学、科研人员具有重要的参考价值。

点集拓扑研究与广义数

王 成 堂 等 著

西北大学出版社出版

（西安市小南门外）

陕西省新华书店发行 国营五二三厂印刷

开本 850×1168毫米 1/32 印张 9.5 字数 210千

1984年11月第1版 1984年11月第1次印刷

印数 1—3,500

统一书号：13320·1 定价：2.00 元

序

点集拓扑学是本世纪初新兴的一门数学学科。西北大学数学系已故杨永芳教授，早在四十年代初就讲授集论、点集拓扑课程。解放后，他不但开设了集论拓扑专门化课程，招收了研究生，还组织了教师的讨论班。杨永芳教授的严谨治学态度，循循善诱的教学方法，培养了一批专攻集论拓扑学科的学生。五十年代初，西北大学数学系拓扑组的同志们在科研上开始出成果，陆续在国内外著名数学杂志上发表，其中有的当时是在国际上有重大影响的。从总体看，我们在这方面的工作水平与国际水平之间的差距在迅速缩短。

杨永芳教授的学生王成堂教授在点集拓扑学研究上取得了一批有重大意义的成果。早在五十年代，他就发表了题为《一致性空间的一个定理》的论文，使得美国数学家I·S·Gól在《美国数学公报 (Bull AMS)》及《荷兰皇家学会记录 (Proc. Amsterdam)》上发表的一系列结果都成了这一定理的推论。I. S. Gól在MR上评论王的结果是“优美的(elegant)”；苏联Скрялепко评论这一结果是一致空间的一条“基本定理”。

波兰著名数学家R. Sikorski为了得到完备Boole代数的M. H. Stone 表现定理，曾在1950年的《Fundamenta

Mathematicae》上提出 ω_μ-可加拓扑空间以及 ω_μ-度量空间概念，对照一般拓扑学中的度量化问题，又提出并研究 ω_μ-度量化问题，但未能彻底解决。实际上，早在1914年F. Hausdorff在其奠定拓扑空间理论的经典著作—《集论纲要》中，就提出过类似的更广义的度量空间，后来M. Fréchet及D. Kurepa等也引入和研究过更广意义下的度量空间，足见这类空间的重要价值了。王成堂于1962年开始对这一问题进行研究，并于1964年在《Fundamenta Mathematicae》上发表了他关于 ω_μ-度量空间的重大成果，在国际上第一个提出了 ω_μ-度量化定理，解决了R·Sikorski的上述问题，完成了R. Sikorski的工作。这一定理推广了一般拓扑学中非常著名的Nagata—Smirnov定理。Nagata—Smirnov定理被公认为自二十年代至五十年代近三十年中一般拓扑学中几个最为重大的成就之一，因而王成堂在国内外学术界受到好评。二十年来，这一成果不断得到国际上的评论和引用。例如，著名数学家I·Juhasz的论文，就是作为王的定理的扩充而提出的(见MR 33(1967)*3257)。日本数学家Y. Yasui还以王的定理作为出发点，给出 ω_μ-度量空间的另外定义，并指出"ω_μ-度量空间类是王引入的"，虽然曾经"F. Hausdorff, L. W. Cohen, C. Goffman, R. Sikorski, F. W. Stevenson、W. J. Thron等讨论过"。捷克著名数学家M. Hušek与奥地利数学家H. C. Reichel合作，于1983年3月在国际权威刊物《Topology Applications》上发表的文章中指出：对于 ω_μ-度量问题"One of the first solutions was given by Wang Shu—Tang in 1964"。王成堂在同一时期撰写的更多的科学论文，因为当时的种种原因未能公开发表，例如收入本论文集中的1963年的论文《ω_μ-

可加拓扑空间的两个注记》，其中定理 2 于六年后被两位美国数学家F. W. Stevenson 与W. J. Thron 独立得到，并发表于波兰的 Fund. Math.， 而定理 1 则于十三年后才为 Y. Yasui 及 H. C. Reichel, P. Nyikos 等独立得到，并分别发表于波兰及日本的有关刊物上。

广义数的提出及研究是王戍堂教授科研工作的另一个方面。由于 ω_μ-空间的研究，早在 1963 年他就开始了推广实数系以解决 δ 函数表现问题的工作。他于 1963 年曾写过一篇短文寄《中国科学》，遗憾的是，因故未能发表。十年动乱，这一工作被搁置下来，直到 1977 年他又重新加以整理，于 1979 年在《中国科学》的数学专辑上发表，其意义是开创了广义数域上分析学的研究工作。这一工作，一方面得到了 δ 函数等的自然表现定理，另方面也与近代物理学中多层次物理世界相呼应，从而探讨用较严格的数学方法以处理现代物理学中经常困扰人们的发散困难。因为广义数是将“实无穷”包括于数系之中的，这是一个有潜在前途的工作。目前，在国内已经引起不少数学和物理学工作者的注目，已故著名数学家关肇直对此项工作就十分重视，认为王戍堂的工作是开创性的。为了引起国内学者的进一步探讨，本文集也选入了几篇有关在物理学上的应用文章。

本文集只是从我组几十年来所取得的成果中撷取一部分，加以整理汇集成册，绝大部分是从王戍堂教授及其指导的学生和研究生的论文中选辑的。近年来，不少学者来函询问这方面的工作，或索取有关资料。为满足这一要求，特编辑本论文集。

西北大学数学系拓扑组

一九八四年五月

目 录

论托尔斯托夫的有界变分函数*

王 戌 堂

摘 要

定义于矩形$R=\{(x,y):a<x<b;\ c<y<d\}$上的二元函数$F(x,y)$当满足下列条件时称作是在Толстов意义下有界变分的：设$S_1,\cdots,S_n,\cdots$为互不相交的圆盘，记ω_n为F于$S_n\cap R$上的振幅，而$\delta(S_n)$为直径，则当$\sum_{n=1}^{\infty}\delta(S_n)<\infty$时$\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n<\infty$。Г. П. Толстов证明了下列结果：(A)设$F(P)$是有界变分函数，则对任意属于R的简单有长曲线$x=x(s)$，$y=y(s)$（s表示弧长），$F(s)=F(x(s),y(s))$是寻常意义下的有界变分函数。(B)设F是连续二元

*）本文发表于《西北大学学报》（自然科学版）1957年第1期。

有界变分函数，则F满足李普希兹条件。本文证明了(1)$F(P)$ 有界变分的充要条件是：对于任意 $p>0$ 都存在着 $\overline{K(p)}>0$，使对于任何的 A_1, …, A_n… 及 B_1, …, B_n, … 当这些点互不相同而且 $\sum_{n=1}^{\infty} p(A_n,B_n)\leqslant p$ 时都推出 $\sum_{n=1}^{\infty}|F(A_n)-F(B_n)|\leqslant\overline{K(p)}$。(2) 设 $F(P)$ 为二元有界变分函数，L 是长度不超过 p 的简单曲线族，则 $F(s)=F(x(s),\ y(s))$ 沿这些曲线的变分不超过 $\overline{K(p)}$。这些结果改进了 Толстов 的结果(A)和(B)。

§1. Г. П. 托尔斯托夫著[1]"关于勒贝格意义的线积分"一文中，引入二变数有界变分函数的定义如下：

定义：设有定义于矩形 $R(a<x<b;\ c<y<d)$ 的函数 $F(x,y)$，对于任意可数互不相重叠的圆系(1)，当其直径总和不为无限大时，$F(x,y)$ 在这些圆上的振幅之总和也是有限的话，$F(x,y)$ 就称为有界变分函数。

根据这一定义，托氏于前引论文中证明了

(A) 设 $F(x,y)$ 为 R 上之有界变分函数，对于任意属于 R 的简单有长曲线 $x=x(s)$，$y=y(s)$ (这里 $0\leq s<\infty$是弧

(1) 所有以后的讨论，圆系实指圆域之系统（即族）而言。

长）函数 $\Phi(s)=F(x(s),\ y(s))$ 则是在寻常意义下变量 s 的有界变分函数；

(B) 连续的有界变分函数 $F(x,y)$ 满足李普希兹条件，其逆也成立。

本文将建立有界变分函数的几个必充条件，和一些极其简单的推论，而 (A) 与 (B) 则明显地含于这些推论中。

§2. 有界变分函数的必充条件. 首先证明几个简单事实，有助于以下的讨论。

今后如无特别声明，恒以 $\rho(A,B)$ 代表二点 A，B 之距离. $\delta(E)$ 表示点集 E 之直径，K_n 代表圆域，而 ω_n 则是函数 $F(P)$ 于 K_n 之振幅，与此同时，I_n 表示区间，ω'_n 为 $F(P)$ 在此区间的振幅。

引理 1. 定义于 R 的有界变分函数 $F(P)$，$(P\in R)$，在 R 上为有界。

证明. 假定其不然，即是 $|F(P)|$ 在 R 无有上界，此时不难看出，有点 $M_1,M_2\cdots\cdots M_n\cdots\cdots,M_n\in R$ 存在，满足下列条件：

1) $\lim M_n=M$，$M\in\overline{R}$；而诸 M_n 位于由 M 发出的两条射线所夹的区域内，其顶角 $<\frac{\pi}{2}$.

2) $|F(M_{n-1})|>2|F(M_n)|>0\ (n=1,2\cdots\cdots)$.

然而此时 $F(P)$ 不复为有界变分函数. 实际上，由于 1)，就能找到 M_{i_1}，M_{i_2} 它满足 $\rho(M_{i_1},M_{i_2})<\frac{1}{2}$，且设 K_1 为以 $\overline{M_{i_1}M_{i_2}}$ 作直径之圆域[(2)]，由 1) 之后半得知 $M\overline{\in}K_1$，同样的

(2) 此处圆域可认为是闭的。

理由，能找到M_{i_3}，M_{i_4}使得$\rho(M_{i_3}, M_{i_4})<\frac{1}{2^2}$，且设$K_2$为以$\overline{M_{i_3}M_{i_4}}$作直径之圆域时，可以认为$K_1\cdot K_2=0$及$M\overline{\in}K_2$；如是应用归纳的步骤，便得到了圆系$K_1, K_2\cdots\cdots K_n$，……俾能满足

a) $\delta(K_n)<\frac{1}{2^n}$，这里的$K_n$是以$\overline{M_{i_{2n-1}}M_{i_{2n}}}$作直径而且$K_i\cdot K_j=0\ (i\neq j)$；

b) $|F(M_{i_{2n-1}})-F(M_{i_{2n}})|\geq\|F(M_{i_{2n-1}})|-|F(M_{i_{2n}})\|>|F(M_{i_{2n-1}})|>|F(M_1)|>0$。

由于a)，$\sum_{n=1}^{\infty}\delta(K_n)<1$；由于$b$) 及 2)，$\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n\geq\Sigma|F(M_1)|=+\infty$ 因此$F(P)$不是R上的有界变分函数，引理于是证毕。

引理2. 设有定义于R的有界变分函数$F(P)$，并有任意区间列I_1，I_2，……，I_n，……，$I_i\cdot I_j=0\ (i\neq j)$；如果$\sum_{n=1}^{\infty}\delta(I_n)\leq p$，则有$\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n'\leq K(p)$，其中$K(p)$是仅依赖于$P$的有限数[(1)]。

证明. 利用反证法即能证明：假如对某一p_0，$K(p_0)=+\infty$，那么对于任何$p>0$，恒有$K(p)=+\infty$。

以下证明，这时必有区间列I_1，$I_2\cdots\cdots I_n\cdots\cdots$ 它们彼此间没有共同内点，而且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\delta(I_n)<+\infty,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\omega_n'=\infty. \qquad (*)$$

(1) 如无特别声明，$K(p)$假定为能适合上述条件之最小者，不存在时规定$K(p)=+\infty$。

取数列 α_1，α_2，……α_k，……$\alpha_k>0$ $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k<+\infty$ (1)

λ_1，λ_2，……，λ_k，……$\lambda_k>0$ $\lim\lambda_k=+\infty$ (2)

若 $K(P)=+\infty$，则能找到有限个区间 I_1，$I_2\cdots\cdots I_{m_1}$，它们彼此间既无共同内点，而且

$$\sum_{k=1}^{m_1}\delta(I_k)<\alpha_1,\quad \sum_{k=1}^{m_1}\omega'_k>2M+\lambda_1 \tag{3'}$$

其中 $M=\underset{P\in R}{Sup}|F(P)|$。现在考虑下列两种情况：

1）至少有某 $k\leq m_1$ 使 I_k 具有与 R 相同的性质，即是将 I_k 看作 R 时引理不真，我们可以认为 $k=m_1$，那么对于 I_1，……，I_{m_1-1}，即有

$$\sum_{k=1}^{m_1-1}\delta(I_k)<\alpha_1,\quad \sum_{k=1}^{m_1-1}\omega'_k>\lambda_1 \tag{3}$$

这时将上述 I_{m_1} 改用 I 表示，而 I_{m_1} 若于以后出现，将与前见的有不同意义。

将上述对于 R 的处理方法施行于 I，得到属于 I 的区间 I_{m_1}，I_{m_1+1}，I_{m_2}[2]满足

$$\sum_{k=m_1}^{m_2}\delta(I_k)<\alpha_2,\quad \sum_{k=m_1}^{m_2}\omega'_k>\lambda_3+2M. \tag{4'}$$

若至少有某 $m_1\leq k\leq m_2$ 使 1）成立，可以认为 $k=m_2$ 而对 I_{m_2} 进行上面步骤，若是永远如此的话，对任意的 n，都能找到 I_{m_n}，……，$I_{m_{n+1}-1}$ 适合

$$\sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1}\delta(I_k)<\alpha_{n+1},\quad \sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1}\omega'_k>\lambda_{n+1} \tag{4}$$

---

(1) 在本文中，所有区间列，均指它们是无共同内点的。

由（1）（2）及（4）等知道I_1，……，I_{m_1-1}，……，I_{m_n}，……，$I_{m_{n+1}-1}$，……使（•）成立．反之，如1）的步骤不能无限的继续下去．

换句话说，即对某个n及I_{m_n}，……，$I_{m_{n+1}}$将有

2)

$$\sum_{l=m_n}^{m_{n+1}} K^{(l)}(p_0)=T,\ T<+\infty;$$ 式中$K^{(l)}(p_0)$相当于将I_l视为R时的$K(p_0)$．

由于$K(p)=+\infty$，$p>0$，有区间I_1^*，……，$I_{s'}^*$存在，如用ω_k'表示$F(p)$于I_k^*的振幅，则有

$$\sum_{k=1}^{s'} \omega_k^* > T+\lambda_{n+1} \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{s'} \delta(I_k^*) < \min\left(\frac{\alpha_{n+1}}{6},\ \frac{p_0}{6},\ \delta_0\right) \tag{6}$$

（6）中δ_0表示诸区间I_{m_n}，……，$I_{m_{n+1}}$最小边之长度；由$\delta(I_k)<\delta_0$，知与I_h^*（h为定数）相交的$I_k(m_n\leq k\leq m_{n+1})$不多于4，且如图1所示，设$I_p$，$I_q$，$I_r$，$I_s$为所有与$I_h^*$相交的区

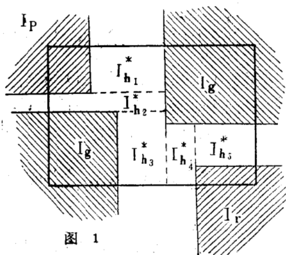


图 1

间，而且 $I_h^* \cdot I_p = I_{hp}^*$，……，$I_h^* \cdot I_s = I_{hs}^*$，则 $I_h^* - I_{hp}^* -$，……$- I_{hs}^*$ 为5个小区间 $I_{h_1}^*$，……，$I_{h_5}^*$ 之和，可以认为它们全部是闭的，用 $\omega_{h_i}^*, \omega_{h_i}^*$，分别表示 $F(P)$ 于 I_{hi}^*，$I_{h_i}^*$ 之振幅（其中 $i=1,2,\cdots\cdots$，而规定：当 $i \neq p, q, r, s$ 时 $I_{hi}^* = 0$；当 $i \neq 1,2,\cdots\cdots,5$ 时 $I_{hi}^* = 0$[1]）。此时由（5）（6）可得

$$\sum_{i,h} \omega_{h_i}^* = \sum_{h=1}^{S'} \sum_{i=1}^{\infty} \omega_{h_i}^* \geq \sum_{h=1}^{S'} \omega_h^* - \sum_{h=1}^{S'} \sum_{i=1}^{\infty} \omega_{hi}^* =$$

$$= \sum_{k=1}^{S'} \omega_k^* - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{S'} \omega_{hi}^* \geq T + \lambda_{n+1} - T$$

$$= \lambda_{n+1}. \tag{7}$$

$$\sum_{i,k} \delta(I_{hi}^*) = \sum_{h=1}^{S'} \sum_{i=1}^{\infty} \delta(I_{h_i}^*) \leq 6 \sum_{h=1}^{S'} \delta(I_h^*) < \alpha_+ \tag{8}$$

今从区间 $I_1, \cdots\cdots, I_{m_{n-1}}$，$I_{m_n} \cdots\cdots$，$I_{1_1}^*, \cdots\cdots, I_{1_5}^*, \cdots\cdots$，$I_{S'_1}^*, \cdots\cdots, I_{S'_5}^*$，将 $I_1 \cdots\cdots, I_{m_{n-1}}$ 取消，尔后把其余者，按其原有顺序重新编号如下：I_1，……，$I_{m_{n+1}-m_n}$，$I_{m_{n+1}-m_{n+1}}^* \cdots$ …，$I_{m_{n+1}-m_n+5S'}^*$。因此就有

$$\sum_{k=1}^{m_{n+1}-m_n} \delta(I_k) < a_{n+1}, \quad \sum_{k=1}^{m_{n+1}-m_n} \omega_k' > \lambda_{n+1}. \tag{9}$$

至此 2）进行完毕[2]。

关于区间 $I_{m_{n+1}-m_{n+1}}^*$，……，$I_{m_{n+1}-m_n+5S'}^*$，也和前面同样，

（1）当然对应地分别有 $\omega_{hi}^* = 0$ 及 $\omega_{hi}^* = 0$。

（2）不难看出，上列区间彼此间无有共同内点。

它只有 1）或 2）两种情况发生，分别按 1），2）的手续进行之，但正如前面所见，可以认为经过有限回后，便有 2）的场合出现，我们将第一组使 2）出现的区间记为 $I_{m_{n+1}-m_{n}+1}$，……，$I_{m_{n+1}}$，……$I_{m_{n+p}}$，此时显见。

$$\sum_{k=m_{n+1}-m_n+1}^{m_{n+1}-m_n+p}\delta(I_k)<a_{n+2}\qquad \sum_{k=m_{n+1}-m_n+1}^{m_{n+1}-m_n+p}\omega_k'>\lambda_{n+2}. \tag{10}$$

其中 I_i，I_j 无共同内点，但 i，j 须要满足 $1\leq i\neq j\leq m_{n+1}-m_n+p$。

应用归纳的步骤，由（1）（2）（9）及（10）等得出满足（•）的区间 I_1，I_2，……，I_n……。

所有以上的讨论证明了：若引理之结论不真，（•）必然成立。以下证明，若（•）成立则 $F(P)$ 不得成为有界变分函数。这样，由反证法便完成了引理之证明。为了这个目的，首先将（•）变为另外一种形式，即是此时必有 A_k，$B_k\in I_k(k=1,2,\cdots\cdots)$ 存在，而满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}|F(A_k)-F(B_k)|=+\infty \tag{:}$$

（:）是不难由（•）直接证明的。此外，我们还能假定 $A_k\neq A_{k'}$，$B_k\neq B_{k'}$ $(k\neq k')$ 及 $A_k\neq B_{k'}$（k,k' 任意）。

取 I_1，I_2，……，I_{n_1}，它满足

$$\sum_{k=1}^{n_1}|F(A_k)-F(B_k)|>\lambda_1 \tag{11}$$

到此为止，先引入程序（S），今以 I_1 及 $\{I_k\}$ $(k>n_1)$ 为例，叙述如下（注意这里假定了 A_k，$B_k\overline{\in}I_{k'}$，$k'>n_1$，这个

假定，可以由取$\{I_{k'}\}$的子族而达到[1]）：

a) A_1是I_1顶点的情况，如图2所示。将$\{I_k\}$（$k>n_1$）分作如下的两类：

1) $\{I_{nk}^{(1)}\}$，$I_{nk}^{(1)}$不含Ⅰ的点；

2) $\{I_{mk}^{(2)}\}$，$I_{mn}^{(2)}$不合Ⅳ的点，而且$I_{nk}^{(1)}\neq I_{mk}^{(2)}$其中Ⅰ，Ⅳ都理解作闭的，由$A_1\overline{\in}I_k$（$k>n_1$）显见

$$\{I_k\}_{(k>n_1)}=\{I_{nk}^{(1)}\}+\{I_{mk}^{(2)}\}$$

因而至少有一组，例如$\{I_{nk}^{(1)}\}$使（⁚）成立；

b) A_1不是I_1顶点的情况，规定$\{I_{nk}^{(1)}\}=\{I_{m_k}^{(2)}\}=\{I_{k'}\}(k'>m_1)$，从此以后，把由$\{I_k\}_{(k>n_1)}$出发，而得到$\{I_{nk}^{(1)}\}$的程序，就称作（$S$）程序，尔后的讨论，我们不用全部的$\{I_k\}_{(k>n_1)}$，而仅由$\{I_{nk}^{(1)}\}$出发。

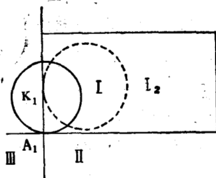


图 2

将区间I_1及$\{I_k\}_{(k>n_1)}$施行程序（S）后，再对于I_2及$\{I_{nk}^{(1)}\}$施行同一程序，其次I_3……继续n_1次为止，代替原来区间$\{I_k\}_{(k>n_1)}$而得到$\{I'_k\}$（特别当$n_1=1$时，$\{I'_k\}=\{I_{nk}^{(1)}\}$），它是原来区间的一个子族，而仍满足（⁚）。

(1) 当然它仍然要满足（⁚），而这是不难办到的。

一般说来，设对于 m 已经求出了 $I_1^{(m-1)}$，……，$I_{n_1^{(m-1)}}^{(m-1)}$ 及 $\{I_k^{(m)}\}_{(k=1,2,\cdots\cdots)}$，而适合下列条件

i) $$\sum_{k=1}^{n_1^{(m)}} |F(A_k^{(m-1)}) - F(B_k^{(m-1)})| > \lambda_m$$

ii) $$\sum_{k=1}^{\infty} |F(A_k^{(m)}) - F(B_k^{(m)})| = +\infty$$

iii) $A_{k'}^{(m-1)}$，$B_{k'}^{(m-1)} \overline{\in} I_k^{(m)}$ （其中 $k' = 1,2,\cdots\cdots,\ n_1^{(m-1)}$）；而且对于任意 $I_{k'}^{(m-1)}$ 来说，$\{I_k^{(m)}\}$ 或者全位于Ⅱ内，或者Ⅳ内[1]。

从 $\{I_k^{(m)}\}$ 中取 $I_1^{(m)}$，……，$I_{n^{(m)}}^{(m)}$，使其满足

$$\sum_{k=1}^{n^{(m)}} |F(A_k^{(m)}) - F(B_k^{(m)})| > \lambda_{m+1}\ , \tag{13}$$

将 $\{I_k^{(m)}\}_{(k>n^{(m)})}$ 就 $I_1^{(m)},\cdots\cdots,I_{n^{(m)}}^{(m)}$，连续施行程序 (S) 共 $n^{(m)}$ 次，而得到 $\{I_k^{(m+1)}\}$，$\{I_k^{(m+1)}\}\subset\{I_k^{(m)}\}$，它与 $\{I_k^{(m)}\}(k\leqslant n^{(m)})$ 一起，使 i) ii) iii) 成立。从而由归纳法原理，从 $\{I_k^{(m)}\}$ 向 $\{I_k^{(m+1)}\}$ ($m=1$，2，……) 的转变恒为可能，同时由2) 3) 等，区间 $\{I'_k\}_{(k\leqslant n^{(1)})}$，$\{I_k^{(2)}\}_{(k\leqslant n^{(2)})}$，……，$\{I_k^{(m)}\}_{(k\leqslant n^{(m)})}$，……满足下列等式：

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n^{(m)}} |F(A_k^{(m)}) - F(B_k^{(m)})| = +\infty \tag{14}$$

从 $\{I_k^{(2)}\}_{(k\leqslant n^{(2)})} + \{I_k^{(3)}\}_{(k\leqslant n^{(3)})} + \cdots\cdots \subset \{I_k^{(2)}\}$ 及 $\{I'_k\}_{(k\leqslant n_1)}$ 与 $\{I_k^{(2)}\}$ 的关系，正如图 2 所示，我们能作圆 K'_1，……，K'_{n_1} 但需适合

(1) $A_{k'}^{(m-1)}$ 不是 $I_{k'}^{(m-1)}$ 的顶点时，Ⅱ，Ⅳ规定为全平面。

(*i*) K'_k 切区间 I_k 之一边而通过 A'_k，且包含 I'_k 的内点。

(*ii*) $K'_i \cdot K'_j = 0$ $(i \neq j)$；　$K'_i \cdot I''_j = 0$ $(i \leq n_1, j = 1, 2 \cdots \cdots)$。

(*iii*) $\sum_{k=1}^{n_1} \delta(K'_k) < \frac{1}{2}$。

一般设已作出圆系$\{K_k^{(h)}\}(h \leq m, k \leq n_1^{(h)})$，满足

(*i*) $K_k^{(h)}$ 切区间 $I_k^{(h)}$ 之一边而通过 $A_k^{(h)}$，且包含它的内点。

(*ii*) $K_i^{(h)} \cdot K_j^{(h)} = 0(h \leq m, i \neq j)$；$K_i^{(p)} \cdot K_j^{(q)} = 0(p \neq q)$；$K_i^{(h)} \cdot I_j^{(m+1)} = 0$ $(i \leq n^{(h)}, h \leq m, j = 1, 2, \cdots\cdots)$。

(*iii*) $\sum_{k=1}^{n^{(h)}} \delta(K_k^{(h)}) < \frac{1}{2^k} (k \leq m)$。

由于$\{I_k^{(m+1)}\}_{(k \leq n^{(m+1)})}$ 与 $\{I_k^{(m+2)}\}_{(k=1, 2, \cdots\cdots)}$ 的关系，不难看出，能作圆系 $K_1^{(m+1)}$，……，$K_{n^{(m+1)}}^{(m+1)}$，使当 $k \leq m+1$ 时 (*i*) (*ii*) (*iii*) 照旧成立。由归纳法得知，对于 $h = 1, 2, \cdots$，均能作圆系使 (*i*) (*ii*) (*iii*) 成立。

为了今后讨论方便起见，把区间 I'_1，……，I'_{n_1}，……，$I_1^{(m)}$，……，$I_{n^{(m)}}^{(m)}$，……按原有顺序，用以下符号表示：I'_1，……，I'_k，……因为 A_k，B_k 对 I_k 而言有着对称的关系。我们还能假定[1]将 (*i*) (*ii*) (*iii*) 中之 $A_k^{(h)}$ 易为 $B_k^{(h)}$ 也照旧成立。

现在专就 I'_{k_0} 来讨论。由 (*i*) 线段 $\overline{A'_{k_0} B'_{k_0}}$ 能用两组圆系 $\{K_k^{(1)}\}$，$\{K_{k'}^{(2)}\}$ 所遮盖，其中 $k \leq s$，$k' \leq s'$，且适合

---

(1) 这只要把由 $\{I_k\}$ 得到 $\{I'_k\}$ 的步骤，施行于 $\{I'_k\}$ 就行了。但为了简单起见，我们将所得区间仍用 $\{I'_k\}$ 表示。

(1) $K_k^{(i)}\cdot K_{k'}^{(i)}=0(k\neq k',\ i=1,2)$；$K'_k$ 交 $\overline{A'_{k_0}B'_{k_0}}$ 于 A_k^i 及 B_k^i；$K_k^{(i)}\subset I'_{k_0}$。但 $k>1$，$K_1^{(1)}$，$K_1^{(2)}$ 则分别是以前所述切 I'_{k_0} 之一边且通过 A'_{k_0} 及 B'_{k_0} 之圆。

$$(2)\quad \sum_{k=1}^{S}\delta(K_k^{(1)})+\sum_{k=1}^{S'}\delta(K_k^{(2)})<2\delta(I'_{k_0}).$$

由（1）还能证明下列的：

$$(3)\quad \sum_{k=1}^{S}|F(A_k^{(1)})-F(B_k^{(1)})|+\sum_{k=1}^{S'}|F(A_k^{(2)})-F(B_k^{(2)})|$$
$$\geq|F(A'_{k_0})-F(B'_{k_0})|.$$

今使 $k_0=1,\ 2,\ \cdots\cdots$，便得到两组圆系，用符号 $\{K_k^{(1)}\}$、$\{K_k^{(2)}\}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ 表示的话，从（1）(2)(3) 及（*）我们分别得到

(1′) $K_k^{(i)}\cdot K_{k'}^{(i)}=0(k\neq k',\ i=1,\ 2)$。

(2′) $\sum_{k}\delta(K_k^{(i)})<+\infty(i=1,\ 2)$，

(3′) 至少有 $i=1,\ 2$ 中之一，而满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}|F(A_k^{(i)})-F(B_k^{(i)})|=+\infty.$$

再由（2′）（3′）及 $A_k^{(i)}$，$B_k^{(i)}\in K_k^{(i)}$，得知 $F(P)$ 便不是 R 的有界变分函数。于是引理证毕。

定理 1. 定义于 R 的函数 $F(P)$ 成为有界变分函数的必充条件是：设有点 $A_1,\ A_2,\ \cdots\cdots A_k,\ \cdots\cdots$；$B_1,\ B_2,\ \cdots\cdots B_k,\ \cdots\cdots\in R$，$A_i\neq A_j$ $B_i\neq B_j$ $A_i\neq B_i$ $(i\neq j)$。此时如果 $\sum_{k=1}^{\infty}\rho(A_k,\ B_k)<+\infty$，那末便有 $\sum_{k=1}^{\infty}|F(A_k)-F(B_k)|<+\infty$。

证明。充分性：很明显。

必要性：能从下列更精密的定理得出。

定理 2. 定义于 R 的函数 $F(P)$ 成为有界变分函数的必充条件是：设有点 A_1, A_2, ……A_k, ……, B_1, B_2, ……B_k ……$\in R$, $A_i \neq A_j$ $B_i \neq B_j$ $A_i \neq B_i$ $A_i \neq B_j$ $(i \neq j)$.

此时如果 $\sum_{k=1}^{\infty}\rho(A_k, B_k) \leq p$，那么便有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|F(A_k)-F(B_k)| \leq \overline{K}(p).$$

其中 $\overline{K}(p)$ 是仅依赖于 p 的有限数。

证明。充分性：很明显。

必要性：我们曾于引理 2 中，引出了一个仅依赖于 $p(<+\infty)$ 的有限数 $K(p)$，$K(p)$ 当然是 p 的单调增加非负函数，以下在于证明 $\overline{K}(p)=2K(2p)+2K(\delta)$，其中 δ 是任意小的正数，即是所求。

设 A_1, A_2, ……, A_N, B_1, B_2, ……B_N 是 R 内任意 $2N$ 个互异的点，只若证明 $\sum_{k=1}^{N}|F(B_k)| \leq \overline{K}(p)$，其中 $\overline{K}(p)=2K(2p)+2K(\delta)$ 而 $p=\sum_{k=1}^{N}\rho(A_k, B_k)$ 就够了。

应用归纳步骤，不难证明，此时必有折线 L_1, L_2, ……L_N 存在，具备下述的性质：

1) L_k 以 A_k, B_k 为其端点，其各环节都与坐标平行或垂直，而且它的长度 $m(L_k)<2\rho(A_k, B_k)$.

2) L_k 不通过 $A_{k'}$, $B_{k'}$ $(k' \neq k)$.

3) $L_k \cdot L_{k'}=\{A_1^{(k)}, \cdots\cdots, A_{S_k}^{(k)}\}$ 为有限个点。

从 3）我们知道，所有不同二折线交点之和$\{A_1^{(k)},\cdots\cdots, A_{S_k}^{(k)}\}$ $(k\leq N)$是有限的点集，而且根据 1）2），经过每个$A_i^{(k)}$的折线不多于两条，将$A_i^{(k)}$用充分小互不相交的区间范围之，我们设这些区间之直径总和$<\delta$，因此$F(p)$于其上振幅的总和$<K(\delta)$。其次，区间外的折线则被分解为互不相交的线段，用两组区间来遮盖它们，尔后通过简单计算，便有下式成立：

$$\sum_{k=1}^{N}|F(A_k)-F(B_k)|\leq\overline{K}(p)$$

其中$\overline{K}(p)$的意义正如前述，至此定理证毕。

因为$\overline{K}(p)$仅依赖于p，下面命题成立。

定理 3. 设$F(P)$是R的有界变分函数，S为所有长度不超过ρ的曲线族，这对$F(p)$沿着S的每一曲线都是有界变分函数[1]，而且其全变分关于S还是有界的。

很明显，定理 3 乃是定理 2 的简单推论，而（A）则仅是这定理的一半。定理 3 对（A）而言，已经精密了一步。

定理 4. 设$F(P)$是定义于R的有界变分函数，则必有定数$K_0>0$存在，而且具备如下的性质：所有满足$|F(A)-F(B)|>K_0\rho(A, B)$，$\rho(A, B)\lessgtr a>0$，的点对儿$(A, B)$，只有有限个适合于 $A_k\neq B_k$ $A_k\neq A_{k'}$ $B_k\neq B_{k'}(k\neq k')$者。

证明. 若其不然，便有$A_1, A_2, \cdots\cdots, A_{k_0}, B_1, B_2, \cdots\cdots B_{k_0}$存在，其中$A_k\neq A_{k'}$，$B_k\neq B_{k'}$，$A_k\neq B_k$，$(k\neq k')$，同时使得$\sum_{k=1}^{k_0}P(A_k, B_k)<p$及$\sum_{k=1}^{k_0}|F(A_k)-F(B_k)|>\overline{K}(p)$成立[2]，但$F(P)$是有界变分函数，因而这是不可能的，于是

---

(1) 是寻常意义下的.

(2) 此处略去它的证明.

定理证毕。

推论 1. 有界变分函数 $F(P)$ 在 R 上除去可列个点外，在其余部分满足李普希兹条件。

证明。取 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_k, \cdots\cdots \alpha_k>0, \lim \alpha_k=0$，根据定理 4，对每一 α_k 有 $E_k=\{A_1^{(k)}, \cdots\cdots A_{S_k}^{(k)}\}$ 存在，若 $A, B\in R-E_k$，而且 $\rho(A, B)>\alpha_k$ 时便有 $|F(A)-F(B)|<K_0\rho(A, B)$，$K_0$ 是绝对常数，从而在 $R-\sum_{k=1}^{\infty}E_k$ 上，$F(P)$ 满足李普希兹条件。

由推论 1 还能证明：

推论 2. 连续的有界变分函数满足李普希兹条件。

附记：1）定理 1，2 中限制 $A_i\neq A_j\cdots\cdots(i\neq j)$ 是必要的，实际我们能够证明如下的。

定理 $F(P)$ 满足李普希兹条件的必充条件是：对于任意的 $A_1, \cdots\cdots, A_k, \cdots\cdots, B_1\cdots\cdots B_k, \cdots\cdots\in R$，如果

$$\sum_{k=1}^{\infty}\rho(A_k, B_k)<+\infty, \text{那末便} \sum_{k=1}^{\infty}|F(A_k)-F(B_k)|<+\infty.$$

这一定理，可以看作是费禾钦高利茨一个定理的推广，请参看 [2]或[3]。

2）推论 1 也可由托氏定理 1，2，4 直接推出，请查参考文献[1]。

3）将定理 3，4 与[1]中第 55 页附注相比较，颇饶兴趣，托氏给两个变数有界变分函数下定义的时候，首先将寻常一个变数有界变分函数的定义，作了变形。同时他所给的定义与后者在形式上也不完全一样，本文的结果证明，这些差异是完全

不必要的。

所有这些结果，都能向任意维的空间作形式上的推广。

§3. 托氏有界变分函数的一个性质。由定理2我们知道：若$F(P)$是定义于R的有界变分函数，K_1，K_2，……，K_n，……是R内互不相重的圆系。如果$\sum_{n=1}^{\infty}\delta(K_n)<p$，那么便$\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n<K(p)$，其中$K(p)$是仅依赖于$p$的有限数，与前所见的不同，设$V_F(p)$是所有上述$K(p)$的下限，而称作是$F(P)$于$R$上的$p$变分时，下面定理成立。

定理 5. 设f_1，f_2，……，f_n，……是定义在R上的（有界变分）函数列，适合以下条件：

a）至少有一点$p_0\in R$，使得$|f_n(p_0)|\leq M_1$。

b）$Vf_n(2p_0)\leq M_2$，其中$\rho_0=\delta(R)$，而$V_R^{(n)}(2p_0)$则是对应于$f_n(p)$的$2p_0$变分。

此时，于f_1，f_2，……，f_n，……，中定能选一子列f_{n_1}，……，f_{n_k}，……向某有界变分函数f收敛。

证明。由定理4之推论1，能取一可列点集E，在$R-E$上对所有的n都有

$$|f_n(A)-f_n(B)|<K_0\rho(A,\ B).$$

其中A，$B\in R-E$，而K_0是绝对常数，这样，函数f_1，f_2，……，f_n，……在$R-E$上是同等连续的。

从a），b）知道

$$|f_n(p)|\leq|f_n(p)-f_n(p_0)|+|f_n(p_0)|\leq M_1+M_2.$$

因而$\{f_n\}$在R上（当然也在$R-E$）还是一致有界的，由阿尔左拉(Arzela)定理知道，有子列f'_{n_1}，……，$\{f'_{n_k}\}$，……在$R-E$

上一致收敛．注意 E 是可列点集．我们不难得到在 R 全面收敛的 $\{f'_{n_k}\}$ 之子列，以下用 $\{f_{n_k}\}$ 表示这一子列，f 是它的极限函数 $f=\lim f_{n_k}$，我们证明 f 也是在 R 上定义的有界变分函数．

实际上，对于任意 $2N$ 个互不相同的点 $A_1, A_2, \cdots\cdots A_N$，$B_1$，$B_2$，$\cdots\cdots B_N \in R$，下述不等式是正确的：

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(A_n)-f(B_n)| = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{N} |f_{n_k}(A_n)-f_{n_k}(B_n)| \leq \lim_{k\to\infty}$$

$$mV_R^{n_k}(2\rho_0) \leqslant mM_2 = \overline{K}(p).$$

其中 $p=\sum_{n=1}^{N}\rho(A_n, B_n)$，$m=m(p)=\left[\frac{p}{\rho_0}\right]+1$，（$[x]$表示 x 的整数部分），$\overline{K}(p)=mM_2=M_2\left(\left[\frac{p}{\rho_0}\right]+1\right)$.

上面的不等式，对于任意的 N 正确，因而定理得证．

这篇论文，是作者 1955 年的毕业论文，在杨永芳教授指导下完成，作者对杨教授谨致谢意．

参 考 文 献

[1] Г. П. Толстов, О Криволинеинои Интеграле В Смысле Лебега, Мат. сб. т. 23(65): 1 (1948), 53—76.

[2] Г. М. Фихтенгольц, Об абсолютно непрерывных функциях, Мат. сб. 31(1922), 286—194.

[3] И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, м—л. 1950: Гл. 9. упраж. 6. （汉译本 徐瑞云译：《实变函数论》下第九章习题6）．

ON FUNCTIONS OF BOUNDED VARIATION IN THE SENSE OF TOLSTOV

Wang Shu—tang

Abstract

In a paper entitled[1] "On cuvilinear integrals in the sense of Lebesgue" Mr. Tolstov introduced the following

Definition. Let F(x,y) be a function defined on the region $R(a<x<b;\ c<y<d)$ and for every sequence of nonoverlapping circular disks Dn such that, whenever $\sum_{n=1}^{\infty}(diam.\ Dn)<\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}(osc.\ F\ on\ R)<\infty$, then we call F (x,y) a function of bounded variation on R.

The following theorems were proved by Tolstov:

(A) If F(x,y) be a function of bounded variation defined on R. Let C: $x=x(s)$ $y=y(s)$ be a simple and rectifiable curve with arc length as parameter, then the function $\Phi(s)=F(x(s),\ y(s))$ be of bounded variation as variable s in the usual sense.

(B) A function F(x,y) which is continuous and of

bounded variation must satisfies Leipshitz's condition.

In the present paper the following theorems **are** proved:

Theorem 1. Let F(x,y) be a function of bounded variation on R, then for every sequence of distinct points of R: A_1, $A_2 \cdots$, A_n, $\cdots B_1$, $B_2 \cdots B_n \cdots$ whenever $\sum_{n=1}^{\infty} \rho(A_n, B_n) \leqslant p$, then, $\sum_{n=1}^{\infty} |F(A_n) - F(B_n)| < K(p)$,

where $\rho(A, B)$ is the distance between A, B, and K(p) a Finite function of $p < \infty$.

As direct corollaries the following theorems may be easily varified

Theorem 2. Let F(x,y) be a function of bounded variation on R, S a class of curves their lengthes bounded, then F(x,y) be of bounded variation along the curves of S. Furthere, its total variations be also bounded on S.

Theorem 3. If F(x,y) is a function of bounded variation on R, then there exists a deunmerable point set E, on R—E then F(x,y) satisfies Leipshitz's condition.

Theorem 2 has improved the proposition (B), and theorem 3 is equivalent to the proposition (A).

From theorem 1: if Dn is any nonoverlapping circular disks $\sum_{n=1}^{\infty} (diam\ D_n) < p$ then $\sum_{n=1}^{\infty} (osc.\ For\ R)$ $< K(p)$. putting $V_F(p) = inf\ K(p)$ and call it the p-

variation of F on R. Then the following theorem can be proved:

Theorem 4. Let f_1, f_2, $\cdots f_n$, $\cdots$ be a sequence of functions of bounded variation satisfying:

1) $f_n(A) < M_1$ for some point of $A \in R$.

2) $V_{f_n}(2\rho) < M_2$ Where $\rho = \text{diam. } R$.

then it can be selected a subsequence f_{n_1}, f_{n_2}, $\cdots$, f_{nk}, $\cdots$ converging to some function f, and f be also of bounded varition on R.

关 于 序 数 方 程*

王戍堂 王克显

摘 要

本文进一步讨论超限序数方程，推广了 Sierpihski 的有关结果。

§1. 根据序数正常表示的唯一性[1]，M. Sierpinski 证明了方程 $\xi^2=\eta^3+1$ 没有超限的序数解。本文目的在于拓广这一结果，而从事更广一类序数方程求解问题的研究。

同一时期，M. Sierpinski 又证明：对于序数 α 与 β 而言，等式 $\alpha\beta=\beta\alpha$ 与 $\alpha^m\beta^n=\beta^n\alpha^m$[1] 等价[1]。本文对于序数的加法，考虑了类似的情况。

§2. 首先证明下列的

定理1. 设 n 为一自然数 $n>1$，则方程

$$\xi^n=\eta^{n+1}+1 \tag{1}$$

没有超限的序数解 ξ 与 η。

证明. 用反证法.

设 ξ，η 为方程 (1) 的一组解，ξ 一定是第一种序数。兹

---

* 本文发表于《数学进展》第3卷第4期 (1957)．

(1) 如无特别声明 m，n 恒代表自然数。

分两种情况进行讨论如次.

1）设η是第一种数．根据［1］，能够假设

$$\xi=\omega^{\alpha_1}a_1+\omega^{\alpha_2}a_2+\cdots+\omega^{\alpha_{k-1}}a_{k-1}+a_k \tag{2}$$

$$\eta=\omega^{\beta_1}b_1+\omega^{\beta_2}b_2+\cdots+\omega^{\beta_{l-1}}b_{l-1}+b_l$$

其中$\alpha_1>\alpha_2>\cdots>\alpha_{k-1}>0$，$\beta_1>\beta_2>\cdots>\beta_{l-1}>0$；而$a_1,a_2\cdots$，$a_k$及$b_1,b_2,\cdots$，$b_l$各为自然数.

从（2）根据序数的运算规则，经过适当计算后得

$$\begin{aligned}\xi^n=&\omega^{\alpha_1 n}a_1+\omega^{\alpha_1(n-1)+\alpha_2}a_2+\cdots+\omega^{\alpha_1(n-1)+\alpha_{k-1}}a_{k-1}+\\&+\omega^{\alpha_1(n-1)}a_1a_k+\omega^{\alpha_1(n-2)+\alpha_2}a_2+\cdots+\\&+\omega^{\alpha_1(n-2)+\alpha_{k-1}}a_{k-1}+\omega^{\alpha_1(n-2)}a_1a_k+\cdots+\\&+\omega^{\alpha_1+\alpha_2}a_2+\cdots+\omega^{\alpha_1+\alpha_{k-1}}a_{k-1}+\omega^{\alpha_1}a_1a_k+\\&\omega^{\alpha_2}a_2+\cdots+\omega^{\alpha_{k-1}}a_{k-1}+a_k,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta^{n+1}=&\omega^{\beta_1(n+1)}b_1+\omega^{\beta_1 n+\beta_2}b_2+\cdots+\omega^{\beta_1 n+\beta_{l-1}}b_{l-1}+\\&+\omega^{\beta_1 n}b_1b_l+\omega^{\beta_1(n-1)+\beta_2}b_2+\cdots+\\&+\omega^{\beta_1(n-1)+\beta_{l-1}}b_{l-1}+\omega^{\beta_1(n-1)}b_1b_l+\cdots+\\&+w^{\beta_1+\beta_2}b_2+\cdots+\omega^{\beta_1+\beta_{l-1}}b_{l-1}+\\&+\omega^{\beta_1}b_1b_l+\omega^{\beta_2}b_2+\cdots+\\&+\omega^{\beta_{l-1}}b_{l-1}+b_l.\end{aligned}$$

因此ξ^n及η^{n+1}各有$n(k-1)+1$及$(n+1)(l-1)+1$项．于是$n(k-1)=(n+1)(l-1)$而存在一自然数r使$k=(n+1)r+1$及$l=nr+1$，而$k>l$；即是$n(k-l)+1=l$．将上述展开式代入（1），并比较对应项的系数不难得到$a_1=b_1$，$a_k=b_l+1$；而$a_1a_k=b_{(k-l)+1}$．从最后项算起，比较对应项系数有$b_{(k-l)+1}=a_{2(k-l)+1}$．从首项起比较系数则$a_{2(k-l)+1}=b_{2(k-l)+1}$（我们不妨设想$n>2$，否则以下比较过程全部取消）．反复进行之，我们最后得出.

$$a_1 a_k = b_{(k-l)+1} = a_{2(k-l)+1} = b_{2(k-l)+1} = \cdots =$$

$$= a_{n(k-l)+1} = a_l = b_1 b_l = a_1 b_l$$

于是 $a_k = b_l$ 这与 $a_k = b_l + 1$ 相矛盾。

2）设 η 为第二种数．证明与［2］大致相同．

设
$$\xi = \omega^{\alpha_1} a_1 + \cdots + \omega^{\alpha_{k-1}} a_{k-1} + a_k \tag{3}$$

$$\eta = \omega^{\beta_1} b_1 + \cdots + \omega^{\beta_l} b_l$$

其中诸数之意义同上。ξ^n 的展开同 1）．仅需求出 η^{n+1}。

$$\eta^{n+1} = \omega^{\beta_1(n+1)} b_1 + \omega^{\beta_1 n + \beta_2} b_2 + \cdots + \omega^{\beta_1 n + \beta_l} b_l$$

因此 ξ^n 及 $\eta^{n+1}+1$ 各有 $n(k-1)+1$ 及 $l+1$ 项．$n(k-1) = l$ $l \geqslant k$．将此等展式代入（1）并比较对应的指数．

$$\beta_1(n+1) = \alpha_1 n = (\beta_1 n + \beta_{(l-k)+1}) n \geqslant \beta_1 n^2$$

于是 $n+1 \geqslant n^2$，但 n 为自然数而且 $n > 1$，因此这是不可能的。

总结 1）2）得到定理之证明。

§3．将方程 $\xi^2 = \eta^3 + 1$ 左端右乘以 2 可以变成有解方程。例如序数

$$\xi = \omega^3 a + \omega^2 2a + \omega 2a + 2$$

$$\eta = \omega^2 2a + \omega 2a + 1$$

便使方程 $\xi^2 \cdot 2 = \eta^3 + 1$ 得到满足。但是可以证明下述之

定理 2．方程 $\xi^n \cdot m = \eta^{n+1} + 1$ 当 $m \neq 2$ 时无有超限序数解。

证明：由反证法。设 ξ, η 为其一组解。ξ 必是第一种序数。当 η 是第二种序数时，完全与定理 1 之 2）相同的推出矛盾。当 η 为第一种数，且具有（2）的形状时，按上述定理的方法可以证明。

$$m a_1 = b_1,\ a_k = b_l + 1;\ a_1 a_k = b_{(k-l)+1} = a_{2(k-l)+1} = b_{2(k-l)+1}$$

$$= \cdots = a_l = b_1 b_l = m a_1 b_l,$$

于是 $a_k = mb_l = b_l + 1$， $b_l = \frac{1}{m-1}$，而b_l为自然数，故必$m = 2$.
然则已经看到 $m = 2$ 时，方程 $\xi^n m = \eta^{n+1} + 1$ 确系可解。于是定理证毕。

方程 $\xi^n \cdot m = \eta^{n+1} + 1$ 的序数解，当 $m = 2$ 时一般形状为

$$\xi = \omega^{\alpha_1} a_1 + \omega^{\alpha_2} a_2 + \cdots + 2$$

$$\eta = \omega^{\beta_1} 2a_1 + \omega^{\beta_2} b_2 + \cdots + 1$$

然则所有解的具体求出，是一尚待解决的问题。

§ 4. M. Sierpinski 在 [3] 中证明 $\alpha\beta = \beta\alpha$ 与 $\alpha^m\beta^n = \beta^n\alpha^m$ 等价。利用同样思想方法，能够证明下记之

定理 3. 对于序数 α, β 而言 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ 与 $\alpha m + \beta n = \beta n + \alpha m$ 等价。其证明步骤，本文从略。

参考文献

[1] W. Sierpinski, Lecons sur les nombres transfinis, Pris, ris, 1950.

[2] W. Sierpinski, Sur l'equation $\xi^2 = \eta^3 + 1$ pour les nombres ordinaux transfinis, *Fund. Math*, V. 43, 1(1956), 1—2.

[3] W. Sierpinski, Sur une propriete des nombres ordinaux, *Fund. Math.*, V. 43, 1(1956), 139—140.

ON SOME EQUATIONS OF ORDINAL NUMBERS

Abstraet

In the paper [2] Mr. Sierpinski proved the follow-

ing equation

$$\xi^2 = \eta^3 + 1$$

has no solution of transfinite ordinal numbers ξ, η.

The main purpose of the present paper is to prove.

Theorem 1. The equation

$$\xi^n = \eta^{n+1} + 1$$

has no solution of transfinite ordinal numbers ξ, η, where n denote an arbitrary natural number, $n > 1$.

Furthermore, we can generalize theorem 1 as:

Theorem 2. The equation

$$\xi^n m = \eta^{n+1} + 1$$

has no solution of transfinite ordinal numbers ξ, η, where $n > 1$, $m \neq 2$ are arbitrary natural numbers.

Neverthless $\xi^2 2 = \eta^3 + 1$ has an solution:

$$\begin{cases} \xi = \omega^3 a + \omega^2 2a + \omega 2a + 2 \\ \eta = \omega^2 2a + \omega 2a + 1, \end{cases}$$

hence, the remaining open problem is to find all such transfinite ordinal numbers ξ, η which satisfying $\xi^n 2 = \eta^{n+1} + 1$.

On the other hand, Mr. Sierpinski in another paper [3] proved the following equations

$$\alpha\beta = \beta\alpha$$

$$\alpha^m \beta^n = \beta^n \alpha^m$$

are equivalent for ordinals α and β, by the same methods we can prove the following equations

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

$$\alpha m + \beta n = \beta n + \alpha m$$

are equivalent for ordinal numbers α and β.

一致性空间的一个定理*

王 戌 堂

摘　要

本文证明了定理：具有势u一致基的一致空间，若其每个势>u的子集S于R中有级≥2的触点，那么空间的拓扑具有势≤u的基底。I. S. Gál用很复杂办法方能证明的一系列结果即全部是这一定理的简单推论。

最近I. S. Gál在论文[1]中引进一般致密性概念，并在一致空间中得到了一系列的结果。

通过一个反例可以说明Gál的某些结果中有错。

本文主要目的在于：对一致空间建立一个比较深刻而且简单的定理(1)。这定理是度量空间中一个经典性结果（[3]，p. 116，p. 107）的推广，其证明方法也无须经过多大的改变。我们修正了[1]中的错误，并且这些修正连同论文(1)的所有其

*）本文发表于《科学记录》2卷10期（1958）

(1) 它基本上是作者另一定理的特殊场合（参看：《论有基底的拓扑空间》，西北大学1958年科学讨论会论文）。

余结果（除定理4以外），都能由本文定理推出。我们这定理不但比[1]深入一步，而且还指出Gál论文[1]中有一个尚未完成之点。本文对其某些结果作了相应的改善和补充，从而使这个部分也得到补足。

§1. 设R为一致空间，而且具有势u的一致基。我们知道，由这个基能得到由势u的伪度量族$P=\{\rho_a\}$所生成的另一基[4]。所谓伪度量，就是满足下列条件的从$R\times R$到$[0, \infty)$的实函数：

1° $\rho_a(x, x)=0$,

2° $\rho_a(y, x)=\rho_a(x, y)$,

3° $\rho_a(x,y)+\rho_a(y,z)\geqslant\rho_a(x,z)$.

P中任意有限个函数的极大函数所成的族P'仍是伪度量族，为了简单记为$P'=\{\rho'_{a'}\}$(1)。于是P'还满足：

4° 对于任意二$\rho'_{a'_1}$，$\rho'_{a'_2}\in P'$，存在$\rho'_{a'}\in P'$，使得$\rho'_{a'}(x,y)=\max\{\rho'_{a'_1}(x,y);\ \rho'_{a'_2}(x,y)\}$就有理数$d>0$和$\rho'_{a'}\in P'$的指标$a'$，置

$$V(a', d)=\underset{(x,y)}{\mathrm{E}}\rho'_{a'}(x,y)<d,$$

也就说这个$V(a', d)$是满足$\rho'_{a'}(x,y)<d$之所有点对(x,y)的集。此时$\{V(a' d)\}$仍是R的一致基。今后该基恒以符号$\boldsymbol{U}$记之*。

由$\boldsymbol{U}$可于R定义拓扑，其基本邻域族为$\{V(a',d)[x]\}$其中$x\in R$，关于此点及符号$\{V[x]\}$的意义见于参考文献[5]。

注意：当u无限时，势$\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}=u$。当$u$有限时，$R$本身即是

* 本书中一律用黑体字母代替原文的花写字母。

(1) 当然，此时$\overline{\overline{P'}}\leqslant u$不一定成立（请对照本文下面的"注意"）。

伪度量空间[5]（此时$\overline{\overline{U}}=u$不一定成立），直接进入本文定理。

定理. 设R为一致空间，具有势u的一致基. 这时下列二命题等价：

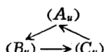
(A_u)　R的重量(1)$\leqslant u$,

(B_u)　$S\subseteq R$而且$\overline{\overline{S}}>u$时，$S$于$R$有级$\geqslant 2$的触点(2),

为了证明，引入下列命题

(C_u)　存在$R_0\subseteq R$，其势$\overline{\overline{R_0}}\leqslant u$而且闭包$[R_0]=R$.

定理的证明按下列步骤进行：



i)　(A_u) $\longrightarrow$ (C_u). 证明同于古典定理：可数基空间的非可数集具有γ点（即级$>\omega_0$的触点）. 故从略.

ii)　(B_u) $\longrightarrow$ (C_u).

a. 当u无限时. 设(C_u)不真，于是至少有一α'使下述$P_{\alpha'}$亦不真（α'是$\rho'_{\alpha'}\in P'$的下标）.

$P_{\alpha'}$. 存在集$M_{\alpha'}$: $\overline{\overline{M}}_{\alpha'}\leqslant u$，且设$x\in R$为任意点时$\rho'_{\alpha'}(x, M_\alpha)=0$（其中$\rho'_{\alpha'}\in P'$）.

如设$P_{\alpha'_0}$不真，此时存在有理数d使下述$P^d_{\alpha'_0}$亦不真.

$P^d_{\alpha'_0}$. 存在集$M^d_{\alpha'_0}$: 势$\overline{\overline{M}}^d_{\alpha'_0}\leqslant u$，且设$x$为$R$的任意一点时有$P'_{\alpha'_0}(x, M^d_{\alpha_0})\leqslant d$ ($\rho'_{\alpha'_0}\in P$).

如设$P^{d_0}_{\alpha'}$不真，根据超限归纳原理便可找到一集$N=\{x_0,$

---

(1) R的重量$\leqslant u$，如果其拓扑结构，存在一组势$\leqslant u$的拓扑基的话.

(2) $x\in R$是集S的级$\geqslant m$的触点，如果对于x的每一邻域V_x势$\overline{\overline{V_xS}}\geqslant m$的话.

$x_1, \cdots, x_\beta, \cdots\}:\overline{\overline{N}}>u$。而且对于 $\beta\neq\beta'$ 恒有 $\rho'_{a'_0}(x_\beta,x_{\beta'})>d_0$。于是很显然 (B_u) 亦不真。

b. 当 u 有限时，R 是伪度量空间. 设 (C_u) 不真便存在彼此距离 >0 的 $u+1$ 个点，故 (B_u) 亦不真。

iii) $(C_u)\longrightarrow(A_u)$.

a. 当 u 无限时，集族 $\{V(\alpha',d)[p]\}$ 便是 R 的势 $\leqslant u$ 的拓扑基，但其中 $p\in R_0(V(\alpha'd)\in u)$。

b. 当 u 有限时，集族 $\left\{\mathop{\mathbf{E}}_{x\in R}\rho(x,p)=0\right\}$

便是 R 的一组势 $\leqslant u$ 的拓扑基，其中 $p\in R_0$。

此中 $\mathop{\mathbf{E}}_{x\in R}\rho(x,y)=0$ 表示所有满足 $\rho(x,y)=0$ 之点 x 的集，但其中 y 是固定点而 ρ 是 R 的伪度量。

§2. 为了简单，把具有势 u 一致基的一致空间记作 $(U)_u$。

引理 1. 设 R 为 (m,n) 致密，其 $n>m$. 这时 R 内势 $>m$ 的任意子集于 R 内有级 $\geqslant 2$ 的触点。

引理 2. 设 R 的重量 $\leqslant u$，于是 R 为 (u,∞) 致密.

当 $u=\omega_0$ 时上述两个引理都是一般拓扑空间的古典定理，但其方法无须经过多大变动就适用于一般的 u. 参看[1] 的引 5，引 6。

今将文[1]的主要结果罗列于下：

1. 设 R 同时为 $(U)_u$ 及 (m,u) 致密 $(m<u)$ ，于是 R 为 (m,∞) 致密（[1]，定理 1）.

2. 设 R 为 $(U)_u$，$m\geqslant u$，并设势 $>m$ 的子集于 R 有聚点，于是 R 为 (m,∞) 致密（[1]，定理 2）.

3. 设 R 同时为 $(U)_u$ 及 (m,n) 致密，但 $m<n, u\leqslant n$,

于是 R 为 (m, ∞) 致密（[1]，定理3）.

4. 设 R 同时为 $(U)_u$ 及 (m, ∞) 致密. 其任意子空间亦为 (m, ∞) 致密（[1]，定理5）.

5. $(U)_u$ 成为完全 (m, ∞) 致密 $(m \geqslant u)$ 的必充条件是：势 $> m$ 的集于 R 有聚点.

上述聚点的定义见于[1]，p.421.

1,3,4 能由引1，2及本文 §1 定理立即推出，今以1为例：由1的题设及引1推知 (B_u) 成立，于是 (A_u) 也成立，再由引2知 R 是 (u, ∞) 致密的. 但 R 原来是 (m, u) 致密的，因此 R 便是 (m, ∞) 致密的.下面我们举例说明2.5.是不正确的.

例. 设 E 是以 ρ 为度量的不可分度量空间. 于是存在着势不可约的非可数复盖 $\{G_a\}$（[3],p.116）.

考虑迪加尔乘积 $E^* = E \times \{1,2\}$，并于 E^* 引入度量 ρ^*，即

$$\rho^*[(p,i), \quad (q,j)] = \rho(p,q) ,$$

其中 $p, q \in E$, $i,j = 1,2$. 容易验证 E^* 是满足2.5题设条件的伪度量空间 $(u = \omega_0)$. 但 $\{G_a \times \{1,2\}\}$ 是 E^* 的势不可约的非可数复盖. 故 2,5 不真. 但利用本文定理很容易将它们修改成：

2′. 设 R 为 $(U)_u$, $m \geqslant u$, 并设势 $> m$ 的集于 R 有级 $\geqslant 2$ 的触点. 于是 R 为 (m, ∞) 致密.

5′. $(U)_u$ 成为 (m, ∞) 完全致密的必充条件是：势 $> m$ 的集于 R 有级 $\geqslant 2$ 的触点（或于其自身有聚点），但其中 $m \geqslant u$.

从上述之例看来，2′,5′ 中对于触点之级 $\geqslant 2$ 这一要求是

不能减弱的了。但对 2′ 尚能作如下的补充：

6. 设 R 为 $(U)_u$，而且势 u 的任意集于 R 有级 u 的触点。于是，R 的任意复盖中存有势 $<u$ 的子复盖（其中 $u>1$）。

当 u 可数时，这是有名的 Heine-Borel-Lebesgue 定理（[1]中定理 2 之注所列的定理是不正确的）。所以 6 正是这一著名定理的推广。2′ 仅是"R 的重量 $\leqslant m$"的后果，而不能看作是上述定理的推广。实际上后者并不可能从 2′ 推出来，正象 Borel 定理不能从 Lindelöf 定理推出来一样。

最后还要指出，[2]中用了很长篇幅才能证明的有关拓扑乘积的一个结果，也可由本文 § 1 之定理立即推出。

7. （[2]，定理 7）。设 R_α 是 $(U)u_\alpha$，其 $\alpha\in\Gamma$，并取(无限)基数 $m\geqslant\overline{\overline{\Gamma}}$，$u_\alpha\leqslant m$。此时，如果每个 R_α 都是完全 (m,∞) 致密的话，则拓扑乘积 $R=\prod_\alpha R_\alpha$ 也是完全 (m,∞) 致密

实际是，据引 1 及 $(B_m)\longrightarrow(A_m)$，$R_\alpha$ 的重量 $\leqslant m$，故 R 及其任意子空间亦然。由引 2 立得 7.

作者感谢杨永芳教授的帮助与指正。

参 考 文 献

[1] Gál, I. S. 1957 Proc. *Akad. Wet. Amsterdam.* 60, 421-430.
[2] Gál, I. S. 1957 *ibid.* 431-435.
[3] Sierpinski, W. 1952 *General Topology.* Toronto.
[4] Bourbaki, N. 1948 *Topologie generale.* ch. IX, 7.
[5] Kelley, J. L. 1955 *General Topology.* Nostrand Co.

A theorem on the uniform spaces

Wang Shu-tang

ABSTRACT

In the present note we prove the following theorem: Let R be a uniform Space with a uniform base of power u, and if every set S with power$>$u has a contact point of order$\geqslant$2. Then the topological weight $W(R) \leqslant u$. A number of results concerning (m,n) compactness of I. S. Gól can be derived from this theorem as simple consequences.

ω_μ-可加的拓扑空间I*

王 戍 堂

摘 要

本文首先研究了ω_μ—距离空间与m-几乎距离空间的关系，并以此为基础解决了R. Sikorski的问题，推广了著名的Nagata-Smirnov距离化定理。文中还特别针对$\mu>0$的情况得到了可ω_μ—距离化的条件。最后，研究了紧性，并推广了著名的Ursohn第二距离化定理。

按照R.Sikorski[1]，所谓集$\boldsymbol{X}$是ω_μ-可加拓扑空间[1]，即指对其每个子集K都定义了满足下列条件的闭包[2]$\overline{K}\subseteq\boldsymbol{X}$：

Ⅰ. $\overline{K}\supseteq K$；

Ⅱ. $\overline{\overline{K}}=\overline{K}$；

Ⅲ. 对于任何$\boldsymbol{X}$的a-子集列$\{K_\xi\}$，$\xi<a$，$a<\omega_\mu$，

---

* 本文发表于《数学学报》1964年第14卷第5期

(1) 我们恒以ω_μ表示规则初始序数.

(2) 这里的叙述方式与[1]在形式上有些出入，但实质相同.

$$\overline{\sum_{0<\xi<\omega_\mu} K_\xi} = \sum_{0<\xi<\omega_\mu} \overline{K}_\xi;$$

Ⅳ. 对于任何X的有限子集K，$\overline{K} = K$.

当 $\mu = 0$，ω_μ-可加的拓扑空间即普通（T_1）型的拓扑空间，但当 $\mu > 0$，则前者较后者更为特殊.

上述类型的拓扑空间，结合着在不同问题的需要，还曾为其他学者所考虑，例如 И.И.Паровиченко[2]，L. W. Cohen 与 C. Goffman[3] 等等. 正则的 ω_μ-可加拓扑空间，当 $\mu > 0$ 时，必是 0 维的[1].

设 A 为一序群[1]，且若存在单调减小的 ω_μ-列$\{\varepsilon_\xi\}$，其中 $\varepsilon_\xi > 0$，$\xi < \omega_\mu$，$\varepsilon_\xi \in A$ 而满足下列条件：

（*）对于 A 的每个元素 $\varepsilon > 0$，存在着序数 $\xi_0 < \omega_\mu$，使 $\varepsilon_\xi < \varepsilon$ 对 $\xi > \xi_0$ 恒成立. 此时即称 A 是特征 ω_μ 的序群.

设X是一集合，A 是某个特征 ω_μ 的序群. 今若对于每一对点 x，$y \in X$ 均对应于 A 的一元 $\rho(x, y)$，且使下列条件得到满足：

a) $\rho(x, x) = 0$

b) $\rho(x, y) = \rho(y, x) > 0$，其中$x \neq y$

c) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$

其中 x，y，z 均表示集合X上的任意点，我们便说 ρ 是 X 上的一个 ω_μ-距离，而X则是 ω_μ-距离空间. 于此空间内，按下式定义极限：

$$x = \lim_{\xi<\omega_\mu} x_\xi, \text{ 当且仅当 } \rho(x, x_\xi) \longrightarrow 0,$$

并由此引入“闭包”、“闭集”及“开集”等，X便成为一个拓扑空间，根据条件（*）不难证明这个空间是 ω_μ-可加

的。

对于 ω_μ-距离空间进行过研究的有 F. Hausdorff[4], L. W. Cohen 与 C. Goffman[3]以及 R. Sikorski[1]等. 后者指出，不少有关可分距离空间的性质均可向一般 ω_μ-距离空间作推广，且往往只须在一些文字上作适当修改就能完全套用原来的证明方法. 但也有例外情况，[1]研究了一些所谓"牵扯到紧性及完备性的奇异现象"问题.

另一方面，由于泛函分析以及其它方面的需要，近来对于 m-几乎距离空间已进行了不少研究工作[5-9]（这实质乃是具有势 m 一致基的一致空间）.

本文分以下几节：

首先，我们于§1研究了 m-几乎距离空间具有 ω_μ-可加性问题，得到了这种空间具有 ω_μ-可加性的充要条件. 然后，我们于§2研究了 ω_μ-距离空间与 ω_μ-几乎距离空间的关系. 得到的结果是：从拓扑观点看来，ω_μ-距离空间就是具有 ω_μ-可加性的 ω_μ-几乎距离空间. 于是就使得两种空间拓扑方面的研究具有了一定的联系. 以此为基础，我们于§3解决了 R. Sikorski[1]遗留下来的 ω_μ-距离化问题，并将文献[1]这方面的结果作为本文定理4的一个推论包含起来. 另一方面，本文定理4是 Nagata-Смирнов 一般距离化定理的推广. 除此以外，本节还得到了其它的一些 ω_μ-距离化条件. 最后，我们于本文§4研究了 ω_μ-紧性，ω_μ-双紧性空间（定义见[1]，[1]中简称它们为紧性，双紧性）的 ω_μ-距离化问题，我们指出，对于这种特殊的空间，Sikorski 的 ω_μ-距离化条件，不仅是充分的而且是必要的，从而得到 П.С.Урысон 第二距离化定理的推广.

§1. m-几乎距离空间

设$\boldsymbol{X}$是一集合，而$\mathrm{P}=\{\rho_\xi\}$是一族定义于集$\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}$上的非负实值函数，其中$\xi$为序数$\xi<\omega(m)$[1]，且满足下列条件：

i) 对$x\in\boldsymbol{X}$及$\xi<\omega(m)$恒有$\rho_\xi(x,\ x)=0$；

ii) 对$x,\ y\in\boldsymbol{X}$及$\xi<\omega(m)$恒有$\rho_\xi(x,\ y)=\rho_\xi(y,\ x)$；

iii) 对$x,\ y,\ z\in\boldsymbol{X}$及$\xi<\omega(m)$恒有$\rho_\xi(x,\ y)\leqslant\rho_\xi(x,z)+\rho_\xi(z,\ y)$；

iv) 设$x,\ y\in\boldsymbol{X}$对$\xi<\omega(m)$恒有$\rho_\xi(x,\ y)=0$则$x=y$；

v) 设$\rho_{\xi_1},\ \rho_{\xi_2}\in P$则$\max\{\rho_{\xi_1},\ \rho_{\xi_2}\}\in P$.

我们便说（X，P）是m-几乎距离空间，有时也简单地说$\boldsymbol{X}$是m-几乎距离空间．对这种空间的任意子集K按下列方式定义闭包$\overline{K}$

$$\overline{K}=\prod_{\xi<\omega(m)}\mathrm{E}[x;\ \rho_\xi(x,K)=0],$$

$\boldsymbol{X}$便成为一个拓扑空间，于此空间形为$\mathrm{E}[x;\ \rho(x,\ x_0)<d]$的一切子集是一拓扑基底，其中$x_0\in\boldsymbol{X}$而$d$是任意正有理数．今后，$m$-几乎距离空间总是赋以这样的拓扑．

首先，不难证明下列定理

命题 1．设$\boldsymbol{X}$是ω_μ-可加拓扑空间，则除非$\mu=0$或$\boldsymbol{X}$是全散（discrete）的，其拓扑结构不能作为一个m-几乎距离空间（在上述意义下）所引出的拓扑结构，其中$m<\omega_\mu$.

证．用反证法，即设$\boldsymbol{X}$是非全散的ω_μ-可加拓扑空间，$\mu>0$，且其拓扑能由伪距离族$P=\{\rho_\xi\}$，$\xi<\omega(m)$引出而$m<$

(1) 这里ω（m）表示势为m的初始数，也就是势为m且序型最小的良序集的序型.

ω_μ. 并设 x_0 是$\boldsymbol{X}$的任一点，于是由

$$\{x_0\}=\prod_{0\leqslant\xi<\omega(m)}\mathrm{E}[x;\ \rho_\xi(x,\ x_0)=0]$$

$$=\prod_{0\leqslant\xi<\omega(m)}\prod_{n=1}^{\infty}\mathrm{E}\left[x;\ \rho_\xi(x,\ x_0)<\frac{1}{n}\right]$$

得知$\{x_0\}$是开集，从而$\boldsymbol{X}$是全散的，这是矛盾。从而命题1得证。

由于全散拓扑空间，对于任意的 $\mu\geqslant 0$，都是 ω_μ-可加的，本节所考虑的拓扑空间将永远认为是非全散的，而不再作任何声明！

由以上命题可见，普通距离概念对于一般的 ω_μ-可加空间已失去意义，这就是必须引入 ω_μ-距离空间概念的一个原因。

又由命题1可见，为得 m-几乎距离空间（的拓扑）是 ω_μ-可加的，必须 $m\geqslant\omega_\mu$（参看命题1后的声明）。一个自然提出的问题是：使得 m-几乎距离空间是 ω_μ-可加的充要条件是什么呢，此处假定 $m\geqslant\omega_\mu$？

下边就来解决这一问题。

设$\boldsymbol{X}$是一集合，P 是$\boldsymbol{X}$上的一族满足前述条件 i)—v) 的伪距离函数，若于P 添入所有形式$d\rho_\xi$的元素，此处 $\rho_\xi\in P$ 而 d 代表正有理数，便得一个新族 P^*，P^* 是 P 的扩大且称作P的补充。

定义 1． $\boldsymbol{X}$及 P 的意义同上．若对每个势$<n$（n是$\leqslant m$的某个基数，m是 P的势）的子族$P'\subseteq P$ 及任意一点 $x_0\in\boldsymbol{X}$，都存在元素 $\rho_\eta\in P$及 x_0 的邻域 $U(x_0)$使得 $\rho_\eta(x,\ x_0)\geqslant\rho_\xi(x,\ x_0)$对于 $\rho_\xi\in P'$ 及 $x\in U(x_0)$恒成立，我们便说P 是 n-局部定

向的.

于是便有下列定理

定理1. m-几乎距离空间$\boldsymbol{X}$是ω_μ-可加的充要条件，是$m\geqslant\omega_\mu$且P^*是ω_μ-局部定向族. 其中$\mu>0$.

证. 充分性. 设$\{G_\xi\}$是$\boldsymbol{X}$的任意开集α-列，其中$\xi<\alpha$而$\alpha<\omega_\mu$. 只须证明每个点$x_0\in\prod_\xi G_\xi$都是这集的内点. 由于对每个开集G_ξ，$\xi<\alpha$，都有正有理数d_ξ以及$\rho_{\eta(\xi)}\in P$使得

$$E[x;\ \rho_{\eta(\xi)}(x,\ x^0)<d_\xi]\subseteq G_\xi,$$

设$\rho^*_{\eta(\xi)}=\frac{1}{d_\xi}\rho_{\eta(\xi)}$则$\rho^*_{\eta(\xi)}\in\rho^*_{\eta(\xi)}$. 又知$\rho^*$是$\omega_\mu$-局部定向族，故存在$\rho^*_\eta\in P^*$及$x_0$的邻域$U(x_\xi)$，使对$x\in U(x_0)$及$\rho^*_{\eta(\xi)}$恒有$\rho^*_\eta(x,x_0)\geqslant\rho^*_{\eta\xi}(x,\ x_0)$. 于是:

$$U(x_0)\cdot E[x\ ;\ \rho^*_\eta(x,\ x_0)<1]\subseteq U(x_0)\cdot\prod_{\xi<\alpha}E[x;\rho_{\eta(\xi)}(x,$$

$$x_0)<d_\xi]\subseteq\prod_{\xi<\alpha}G_\xi.$$

因此，x_0是集$\prod_\xi G_\xi$的内点.

必要性. 设$P'\subseteq P^*$且P'的势$<\omega_\mu$，并设x_0是$\boldsymbol{X}$的任意点，由于$\boldsymbol{X}$是ω_μ-可加的，$\mu>0$，所以下列集$U(x_0)$是x_0的开邻域:

$$U(x_0)=\prod_{\rho^*_\xi\in P'}E[x;\ \rho^*_\xi(x,\ x_0)=0]=$$

$$=\prod_{\rho^*_\xi\in P'}\prod_{n=1}^{\infty}E\left[x;\ \rho^*(x,\ x_0)<\frac{1}{n}\right].$$

而对于每个$\rho^*_\eta\in P^*$, $x\in U(x_0)$及$\rho^*_\xi\in P'$将有$\rho^*_\eta(x,\ x_0)\geqslant0=\rho^*_\xi(x,\ x_0)$成立，从而$P^*$是$\omega_\mu$-局部定向族.

定理 2. X，P 的意义同前，则 X 是 ω_μ-可加的空间的充要条件是，$m\geqslant\omega_\mu$ 而且对于 P 的每个势 $<\omega_\mu$ 的子族 P' 及任意点 $x_0\in X$ 存在一个邻域 $U(x_0)$，使得当 $x\in U(x_0)$ 及 $\rho_\xi\in P'$ 时 $\rho_\xi(x, x_0)=0$。

证　充分性。不难看出 P 的补充 P^* 也具有题设中 P 的性质，因而是 $|\omega_\mu|$-局部定向族。由定理 1 即得充分性证明。

必要性。完全同于定理 1 相应部分的证明，故从略。

§2. $|\omega_\mu|$-几乎距离空间与 ω_μ-距离空间的关系

首先有下列命题：

命题 2. 对于 ω_μ-距离空间 X 的每一开复盖 G 必存在着一个 ω_μ-离散的从属开复盖 G（所谓集族 G' 是 ω_μ-离散的，是指可将 G' 表为 $G=\sum\limits_{0<\xi<\omega_\mu}G'_\xi$，其中每个 G'_ξ 均是离散的）。且若 $\mu>0$，则 G' 还可要求其为由开闭集所组成。

这里及以后的讨论，所用名词大都采用自关先生的"拓扑空间概论"[10]。

证。第一部分基本同于 $\mu=0$ 时的情况。首先将族 G 中的元素按"$<$"编成良序。并对 $U\in G$ 命 $U_\xi=E[x;\ \rho(x;\ X-U)>\varepsilon_\xi]$，其中 ρ 是 X 的 ω_μ-距离，ε_ξ 见前述条件（*），于是 $\rho(U_\xi,\ X-U_{\xi+1})>\varepsilon_\xi-\varepsilon_{\xi+1}$。若置 $U'_\xi=U_\xi-\Sigma\{V_{\xi+1};\ 其\ V\in G\ 且\ V<U\}$，于是对于不同的 U，$V\in G$ 恒有 $\rho(U'_\xi,\ V'_\xi)>\varepsilon_\xi-\varepsilon_{\xi+1}$。今取 A 的二元 ε' 及 ε''：$\varepsilon''<\varepsilon'$，$\varepsilon'>0$ $\varepsilon''>0$ 而且 $2\varepsilon'<\varepsilon_\xi-\varepsilon_{\xi+1}$（这里 ε'，ε'' 的存在性是不难验证的），再取下列集合：

$$U^*_\xi=E[x;\ \rho(x,\ U_\xi)\leqslant\varepsilon''],$$

$$U_\xi^{**}=E[x;\ \rho(x,\ \rho_\xi(x,\cdot U_\xi)<\varepsilon'].$$

于是 U_ξ^* 是闭集，U_ξ^{**} 是开集，$U_\xi^*\subseteq U_\xi^{**}$。如 $\mu>0$，则由于 $\boldsymbol{X}$ 是正规空间[1]及文[1]定理（v）存在开闭集 $\widetilde{U}_\xi$ 合于条件 $U_\xi^*\subseteq\widetilde{U}_\xi\subseteq U^{**}_\xi$。

按照已知的方法[10]就能证明集族 $\{U^{**}\}$，或当 $\mu>0$ 时的集族 $\{\widetilde{U}_\xi\}$，就是所求的 ω_μ-离散的从属复盖 G'，此处 $\xi<\omega_\mu$，$U\in G$。

命题 3. ω_μ-距离空间是可以 $|\omega_\mu|$-几乎距离化的，即对 ω_μ-距离空间 $\boldsymbol{X}$ 可引入势 $|\omega_\mu|$ 的满足 § 1 条件 i)—v) 的 $P=\{\rho_\mu\}$，使由后者决定的拓扑与原来的拓扑一致。

证。由命题 2 知，$\boldsymbol{X}$ 存在一组 ω_μ-拓扑基（m-基的定义见[7]），又 $\boldsymbol{X}$ 是正规空间[1]，于是由[7]定理 1 即得命题 3。

下边是命题 3 的逆，是本文后面一系列结果的关键。

命题4. ω_μ-可加的 $|\omega_\mu|$-几乎距离空间 $\boldsymbol{X}$ 必是可以 ω_μ-距离化的。即于 $\boldsymbol{X}$ 可以引入一 ω_μ-距离，且由此决定的拓扑结构与原有者相同。

证。以 $\boldsymbol{A}$ 表示所有由实数组成的 $|\omega_\mu|$-列之集，若 a，$b\in\boldsymbol{A}$

$$a=(a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_\xi,\ \cdots),$$
$$b=(b_0,\ b_1,\ \cdots,\ b_\xi,\ \cdots),$$

其中 $\xi<\omega_\mu$，则定义

$$a\pm b=(a_0\pm b_0,\ \cdots,\ a_\xi\pm b_\xi,\ \cdots).$$

又若对于上述 a，b 有序数 $\xi_0<\omega_\mu$，使当 $\xi<\xi_0$ 时 $a_\xi=b_\xi$ 及 $a_{\xi_0}<b_{\xi_0}$，则定义 $a<b$。不难验证 $\boldsymbol{A}$ 便是一个特征 ω_μ 的序群，为了看出这一点只须取 $\varepsilon_\xi=(a_0^\xi,\ a_1^\xi,\ \cdots,\ a_\eta^\xi,\ \cdots)$ 合于条件

$$a_\eta^\xi=\begin{cases}0, & \eta\neq\xi \text{ 时},\\ 1, & \eta=\xi \text{ 时}\end{cases}$$

者.

现在设$\boldsymbol{X}$是ω_μ-可加的$|\omega_\mu|$-几乎距离空间，$P=\{\rho_\xi\}$是§1中之伪距离函数族．若$\mu=0$，则$P=\{\rho_n\}$，于是$\boldsymbol{X}$可按

$$\rho(x,\ y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\min\{1,\ \rho_n(x,\ y)\}$$

而距离化（方法是熟知的），故以下讨论系在$\mu>0$的假定下进行．现在定义

$$\rho(x,\ y)=(\rho_0(x,\ y),\ \rho_1(x,\ y),\ \cdots,\ \rho_\xi(x,\ y),\ \cdots),$$

于是$\rho(x,\ y)\in A$．而$(\boldsymbol{X},\ \rho)$便是ω_μ-距离空间．以下证明这个ω_μ-距离空间的拓扑T^2与原有的拓扑T^1一致．这只须运用一些简单的集合运算就行了．

（Ⅰ）对于$\varepsilon\in A$，$\varepsilon>0$及点$x_0\in\boldsymbol{X}$，集

$$E[x;\ \rho(x,\ x_0)<\varepsilon]$$

恒为T^1开集．这可由下式立即看出

$$\begin{aligned}E[x;\ \rho(x,\ x_0)<\varepsilon]&=\sum_{0\leq\eta<\omega_\mu}\prod_{0\leq\xi<\eta}E[x;\ \rho_\xi(x,\ x_0)=a_\xi]\cdot\\&\quad\cdot E[x;\ \rho_\eta(x,\ x_0)<a_\eta]\\&=\sum_{0\leq\eta<\omega_\mu}\prod_{0\leq\xi<\eta}\prod_{n=1}^{\infty}E\left[x;\ \rho_\xi(x,\ x_0)<a_\xi+\frac{1}{n}\right]\cdot E\left[x;\ \rho_\xi(x,\ x_0>a_\xi-\frac{1}{n}\right]\cdot E[x;\ \rho_\eta(x,\ x_0)<a_\eta],\end{aligned}$$

其中$\varepsilon=(a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_\xi,\ \cdots)$.

（Ⅱ）对于实数 $a>0$，任意点 $x_0\in X$，下集恒是 T^2 开集

$$E[x;\ \rho_\alpha(x,\ x_0)<a],$$

其中 $\alpha(<\omega_\mu)$ 任意给出，但于下述讨论中固定不变。

为证明（Ⅱ），首先取非负实数的 α-列：$a_0,\ \cdots,\ a_\xi,\cdots,$ $\xi<\alpha$ 并作集

$$\triangle(a_0,\ \cdots,\ a_\xi,\ \cdots)=\prod_{0\leqslant\xi<\alpha}E[x;\ \rho_\xi(x,\ x_0)=a_\xi]\cdot E[x;\ \rho_\alpha(x,\ x_0)<a]$$

然后取 $b^{(n)}=(b_0^{(n)},\ b_1^{(n)},\ \cdots,\ b_\alpha^{(n)},\ 0,\ 0,\cdots)$ 及 $C^{(n)}=(C_0^{(n)},$ $C_1^{(n)},\ \cdots,\ C_\alpha^{(n)},\ 0,\ 0,\ \cdots)$ 其中当 $\xi<\alpha$ 时 $b_\xi^{(n)}=C_\xi^{(n)}=a_\xi$ 而 $b_\alpha^{(n)}$ $=a-\dfrac{1}{n}$，$C_\alpha^{(n)}=-1$，于是不难验证

$$\triangle(a_0,\ \cdots,\ a_\xi,\ \cdots)=\sum_{n=1}^{\infty}E[x;\ \rho(x,\ x_0)<b^{(n)}]\cdot E[x;\ \rho(x,\ x_0)>C^{(n)}],$$

从而 $\triangle(a_0,\ \cdots,\ a_\xi,\ \cdots)$ 是开集，将其就一切非负实数 $a_\xi(\xi<\alpha)$ 求和即证得（Ⅱ）。

由命题 3 及命题 4 可见，下列定理成立：

定理 3．从拓扑观点看来，ω_μ-距离空间与 ω_μ-可加的 $|\omega_\mu|$-几乎距离空间完全是一致的，换言之，拓扑空间是 ω_μ-可距离化的充要条件是：它是 $|\omega_\mu|$-可几乎距离化的 ω_μ-可加拓扑空间。

特别，拓扑空间 ω_0-可距离化的充要条件是：它在普通意义下是可距离化的。

§3．ω_μ-距离化定理

现在转入本文的中心内容，即解决一般的 ω_μ-距离化问

题。

定理 4. 为了正则的 ω_μ-可加拓扑空间$\boldsymbol{X}$是 ω_μ-可距离化的，其充要条件是$\boldsymbol{X}$具有 ω_μ-拓扑基底。

定理"必要性"部分的证明已见命题 3。以下给出定理"充分性"部分的证明。为此，据定理 3 以及 S. Mrowka 文[7]定理 1，只须证明在题设条件下$\boldsymbol{X}$是正规空间就行了（后者本身即是文献[1]定理 (vii) 的改进）。

今设 F_1 及 F_2 是两个非空且不相交之闭集。由于$\boldsymbol{X}$是(T_1)正则空间，故对任意 $x\in F_1$ 及 $y\in F_2$，将存在开集 $G^1(x)\in G_{\xi(x)}$ 及 $G^2(y)\in G_{\xi(y)}$，使 $x\in G^1(x)$ 及 $y\in G^2(y)$，且$\overline{G^1(x)}\cdot F_2=\overline{G^2(y)}\cdot F_1=0$（其中 G 是题设中的 $|\omega_\mu|$-基底，因而 $G=\sum\limits_{0\leqslant\xi<\omega_\mu}G_\xi$ 而 G_ξ 是局部有限的）。

今置

$$G_\eta^1=\sum_{\xi(x)=\eta}G^1(x)\text{ 及 }G_\eta^2=\sum_{\xi(y)=\eta}G^2(y),$$

其中 $x\in F_1$，$y\in F_2$。并置

$$G_\eta^{\bullet}=G_\eta^1-\sum_{0\leqslant\xi\leqslant\eta}\overline{G_\xi^2},\quad G_\eta^{\bullet\bullet}=G_\eta^2-\sum_{0\leqslant\xi\leqslant\eta}\overline{G_\xi^1}$$

及

$$G^{\bullet}=\sum_{0\leqslant\eta<\omega_\mu}G_\eta^{\bullet};\quad G^{\bullet\bullet}=\sum_{0\leqslant\eta<\omega_\mu}G_\eta^{\bullet\bullet},$$

于是便有

1) $G^{\bullet}\supseteq F_1$（同理 $G^{\bullet\bullet}\supseteq F_2$）。实际上，显然是$\sum\limits_{0\leqslant\eta<\omega_\mu}G_\eta^1\supseteq F_1$，因此只须证 $F_1\cdot\sum\limits_{0\leqslant\xi<\eta}\overline{G_\eta^2}=0$，这由下式立即推出：

$$\overline{G_\eta^2} = \overline{\sum_{\xi(y)=\eta} G^2(y)} = \sum_{\xi(y)=\eta} \overline{G^2(y)} .$$

最后一式成立，由于G_η的局部有限性。

2）G^*（同理G^{**}）是开集。由公理Ⅱ，Ⅱ显然。

3）$G^* \cdot G^{**} = 0$。这只要证，对η_1，$\eta_2 < \omega_\mu$恒有$G^*_{\eta_1} \cdot G^{**}_{\eta_2} = 0$。实际是，例如设$\eta_1 \leqslant \eta_2$，则由$G^*_{\eta_1} \subseteq G^1_{\eta_1}$得

$$G^*_{\eta_1} \cdot G^{**}_{\eta_2} \subseteq G^1_{\eta_1} \cdot \left(G^2_{\eta_1} - \sum_{\xi<\eta_2} G^1_\xi\right) \subseteq G^1_{\eta_1} \cdot (G^2_{\eta_2} - G^1_{\eta_1}) = 0 .$$

由1），2）及3）知$\boldsymbol{X}$是正规的。

推论（R. Sikorski）。设$\boldsymbol{X}$是正则的ω_μ-可加拓扑空间。且具有势$\leqslant |\omega_\mu|$的拓扑基，则$\boldsymbol{X}$必是ω_μ-可距离化的。

此外，著名的 Nagata-Смирнов一般距离化定理实质上是定理 4 当$\mu = 0$时的特殊情况。

下面的定理 5 是专就$\mu > 0$的情况而设：

定理 5。设$\mu > 0$，则ω_μ-可加拓扑空间$\boldsymbol{X}$，ω_μ-可距离化的充要条件，是存在由开闭集组成的$|\omega_\mu|$-拓扑基底。

必要性部分的证明已见命题 2（实际是，由此命题出发再作些已知的推理）。至于充分性部分，只须注意到$\boldsymbol{X}$，此时实际是正则空间，便可由定理 4 推出，

值得注意，定理 5 还可给出一不借助于Урысон引理的证明(定理 4 的证明借助于[7]的定理 1，而因此引用了Урысон引理）。

另一应该指出的是，若于定理 4.定理 5 中将"$|\omega_\mu|$-基底"改换成"$|\omega_\mu|$-离散基底"，则定理照旧成立(注意到命题2！)。于是我们也将 Bing 的距离化定理推广到$\mu > 0$的情况。

由定理 5 可作几点推论，它于[11]紧密相关。

推论 1．设$\mu>0$，为了一个ω_μ-可加拓扑空间$\boldsymbol{X}$是ω_μ-可距离化的充要条件，是存在一系非负实值连续函数族$P=\{P_\xi\}$而$P_\xi=\{f_\eta^\xi\}$，其中f_η^ξ是$\boldsymbol{X}$上的非负实值连续函数，$\xi<\omega_\mu, \eta<\eta(\xi)$（$\eta(\xi)$是仅依赖于$\xi$而定的序数），且满足下列条件：

1）对于每一$\xi<\omega_\mu$，$\{E[x; f_\eta^\xi(x)>0]\}$，$\eta<\eta(\xi)$，是一于$\boldsymbol{X}$局部有限集族；

2）集族$\{E[x; f_\eta^\xi(x)>1]\}$，$\xi<\omega_\mu$，$\eta<\eta(\xi)$，是$\boldsymbol{X}$的一组拓扑基。

证．必要性．设定理 5 中由开闭集组成的$|\omega_\mu|$-基底为G，于是$G=\sum\limits_{0<\xi<\omega_\mu} G_\xi$。对于每个$\xi<\omega_\mu$设想将$G_\xi$中元素良序化：$U_0^\xi, U_1^\xi, \cdots, U_\eta^\xi, \cdots$，$\eta<\eta(\xi)$于是定义$f_\eta^\xi$为

$$f_\eta^\xi(x)=\begin{cases}2, & \text{当 } x\in U_\eta^\xi \text{ 时；}\\ 0, & \text{当 } x\notin U_\eta^\xi \text{ 时}\end{cases}$$

即可。

充分性。很显然$\{E[x; f_\eta^\xi(x)>1]\}$，$\xi<\omega_\mu$，$\eta<\eta(\xi)$，是$\boldsymbol{X}$的$|\omega_\mu|$基底．且由

$$E[x; f_\eta^\xi(x)>1]=\sum_{n=1}^{\infty} E\left[x; f_\eta^\xi(x)\geqslant 1+\frac{1}{n}\right].$$

可见该基底由开闭集组成，由定理 5 即得证。

推论 2．为了ω_μ-可加拓扑空间$\boldsymbol{X}$是ω_μ-可距离化的，其充要条件是：存在一族非负实值连续函数$\{f_U\}$使$\{E[x; f_U(x)>0]\}$形成$\boldsymbol{X}$的$|\omega_\mu|$-拓扑基。

证．当$\mu>0$时，必要性部分及充分性部分的证明方法均同于推论 1；$\mu=0$时，充分性的证明则完全同于Nagata-Смирнсв的定理，故也从略，今证必要性．此时$\boldsymbol{X}$是普通距离空

间（严格说来在拓扑不变的意义下，可以将$\boldsymbol{X}$看作距离空间），设其距离函数为ρ，并设G是$\boldsymbol{X}$的$|\omega_0|$-拓扑基。对于$U\in G$令$f_U(x)=\rho(x;\ \boldsymbol{X}-U)$，则$\{f_U\}$即所求。

推论1、2中将“$|\omega_\mu|$-基”改换为“$|\omega_\mu|$-离散基”照旧成立。

§4. ω_μ-紧性及ω_μ-双紧性

下列定义是已知的，但为了读者方便，列于下：

定义2. 设$\boldsymbol{X}$为拓扑空间，如于$\boldsymbol{X}$的任意势$|\omega_\mu|$的开集复盖中均存在势$<|\omega_\mu|$的子复盖，即称$\boldsymbol{X}$是ω_μ-紧的；若于$\boldsymbol{X}$的任意开集复盖中均存在势$<|\omega_\mu|$的子复盖，即称$\boldsymbol{X}$是ω_μ-紧的；若于$\boldsymbol{X}$的任意开集复盖中均存在势$<|\omega_\mu|$的子复盖，则称$\boldsymbol{X}$是ω_μ-双紧的。

若$\boldsymbol{X}$是ω_μ-距离空间，则此处的ω_μ-紧性与[1]的等价；ω_μ-双紧性的定义已见[1]([1]将它们简称为compact与bicompact)。

我们说$\boldsymbol{X}$是$|\omega_\mu|$-Lindelof空间，是指$\boldsymbol{X}$的任意开集复盖中存在势不超过$|\omega_\mu|$的子复盖。

命题5. 设$\boldsymbol{X}$是ω_μ-可加的$|\omega_\mu|$ Lindelöf空间，如果$\boldsymbol{X}$是正则的，则必也是正规的。

这一命题也为И. И. Паровиченк[2]得到。证明方法完全是已知的，故从略。

定理6. 设$\boldsymbol{X}$是ω_μ-紧的ω_μ-距离空间，则$\boldsymbol{X}$必具有势$\leqslant\omega_\mu$基底，从而是ω_μ-双紧空间。

证。此时$\boldsymbol{X}$是$|\omega_\mu|$-紧的ω_μ-几乎距离空间，每一势$\geqslant|\omega_\mu|$的子集于$\boldsymbol{X}$必有级$\geqslant2$的触点[9]，从作者文[9]即知$\boldsymbol{X}$具有势

$\leqslant |\omega_\mu|$ 的拓扑基，且是 ω_μ-双紧的。

定理 7．为了一个 Hausdorff，ω_μ-可加的且 ω_μ-紧的拓扑空间 X 是 ω_μ-可距离化的，其充要条件是 X 具有势 $\leqslant |\omega_\mu|$ 的拓扑基．

证．必要性．由定理 6 即得．

充分性．由定理 4 之推论即得（完全套用既知的方法即可证明 X 的正则性，今从略）．

定理 7 是 Урысон 第二距离化定理的推广．

参 考 文 献

[1] Sikorski, R, Remarks on some topological spaces of high power, *Fund. Math*, 37(1950), 125—136.

[2] Паровиченко, И.И.О некоторых специальных клссах топологических пространств и бs-операции, ДАН СССР, 115(1957), 866—868.

[3] Cohen, L.W., Goffman, C., a) A theory of transfinite covergence, *Trans.Amer.Math.Soc.*, 66(1949), 65—74; b) The theory of ordered abelian groups, *Trans.Amer.Math.Soc.*, 67(1949), 310—319.

[4] Hausdorff, F., Grundzuge der mengenlehre, *Leipizig*, 1914.

[5] Slowikowski, W., Elementary sequences in almost metric spaces, *Bull.Acad.Polon.Sci.*, Classe lll, 5: 2 (1957), 109—112.

[6] Mrowka, S., On almost metric spaces, *Bull.Acad.qolon.Sci.*, Classe lll, 5: 2(1957), 122—127.

[7] Mrowka, S., Remark on locally finite systems, *Bull. Acad. polon. Sci.*, 5: 2(1957), 129—132.

[8] Gál, l. S., On a generalized notion of Compactness, *Kon. Ned. Akad. Wet. Proceedings*, 60(1957), 412—435.

[9] 王戍堂：《一致性空间的一个定理》，《科学记录》，2: 10(1958), 392—395.

[10] 关肇直：《拓扑空间概论》，科学出版社，北京，1958年，
[11] Mrowka, S., A necessary and sufficient condition for m-almost metrisability, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, Classe 111, 5: 6 (1957), 627—629.

REMARKS ON ω_μ-ADDITIVE SPACES (1)

Wang Shu-tang

Abstract

We first investigate, in the present paper, the relationship of ω_μ-metric spaces and m-almost metric spaces. Based on this investigation the ω_μ-metrisation problem of R. Sikorski is solved. For the case $\mu>0$, an ω_μ-metrization theorem is also obtained. Hence, the well-known Nagata-Smirnov theorem and Urysohn second theorem on metrizability are generalized to higher cardinals.

REMARKS ON ω_μ-ADDITIVE SPACES*

by

Wang Shu-tang

§ 1. **Preliminary notions.** According to Sikorski[9], the set X is called an *ω_μ-additive*(1) *space* if there is defined (for every subset X) a closure operation $X \to \overline{X}$ satisfying the following axioms:

I. $\overline{\sum_{0 \leq \xi < \alpha} X_\xi} = \sum_{0 \leq \xi < \alpha} \overline{X}_\xi$, for every α-sequence of sets $\{X_\xi\}$, $\alpha < \omega_\mu$;

II. $\overline{X} = X$ for every finite subset X;

III. $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.

If $\mu = 0$, the axiomatic system I–III coincides with the closure axiomatic system of Kuratowski, but for $\mu > 0$ it is stronger than that system. Similar spaces were also considered by Parovicenko[8], Cohen, Goffman [1], [2], and others. A regular ω_μ-additive space, for $\mu > 0$, must

*First published in «Fundamenta Mathematicae»55:2(1964).

(1) ω_μ denotes a regular initial ordinal number.

be 0-dimensional.

Let A be an ordered group(1), and if there exists a decreasing positive ω_μ-sequence $\{\varepsilon_\xi\}$, $\xi<\omega_\mu$ and $\varepsilon_\xi \in A$, satisfying the condition that for every positive element $\varepsilon \in A$ there exists an ordinal $\xi_0<\omega_\mu$ such that $\varepsilon_\xi<\varepsilon$ for every $\xi>\xi_0$ $(\xi<\omega_\mu)$, then we say that A is *of character* ω_μ.

Suppose X is a set and with every given pair of points $p, q \in X$, there is associated an element $\rho(p, q) \in A$, where A is an ordered group of character ω_μ, such that

a) $\rho(p, p)=0$;

b) $\rho(p, q)=\rho(q, p)>0$ for $p \neq q$;

c) $\rho(p, q) \leqslant \rho(p, r)+\rho(r, q)$.

Then ρ is called an *ω_μ-metric* on X and X is called an *ω_μ-metric space*.

For an ω_μ-metric space X, we can introduce the natural topology by setting(2) $\overline{X}=\mathbf{E}[p;\ \rho(p, X)=0]$,

---

(1) I.e. an ordered set in which with every $a, b \in A$ there is associated an element $c \in A$ called the *sum* of a and b: $c=a+b$ and such that: 1° $a+(b+c)=(a+b)+c$; 2° $a+c \leqslant b+c$, if and only if $a \leqslant b$; 3° for every $a, b \in A$ there exists an element $c \in A$ such that $a+c=b$. The symbol 0 denotes the element satisfying $a+0=a$. An element a *is positive* if $a>0$ (see footnote (11) of [9], p. 128).

(2) The symbol $E[p;\ \varphi(p)]$ denotes the set of points p which satisfies the condition φ, i.e. the proposition $\varphi(p)$ is true.

where X is an arbitrary subset of $\boldsymbol{X}$ and $\rho(p;X)=0$ means that for every positive $\varepsilon\in A$ there exists a $p\in X$ such that $\rho(p, p')<\varepsilon$. And, then, the sets $\mathbf{E}[p;\ \rho(p, p_0)<\varepsilon]$, where $p_0\in \boldsymbol{X}$ is arbitrarily given and ε is an arbitrary positive element of A, form a basis of the open sets of $\boldsymbol{X}$. It can be proved that such spaces are ω_μ-additive. For this purpose it is only necessary to prove that the intersection of every a-sequence $(a<\omega_\mu)$ of open sets $\{G_\xi\}$ is open. Let p_0 be an arbitrary point of $\prod G_\xi$; then for each G_ξ there exists a positive element $\varepsilon_{\eta(\xi)}\in A$ such that $\eta_\xi<\omega_\eta$, and if $\rho(p,p_0)<\varepsilon_{\eta(\xi)}$ then $p\in G_\xi$. Let ξ_0 be an ordinal which is greater than every η_ξ and $\xi_0<\omega_\mu$; then for $\rho(p,p_0)<\varepsilon_{\xi(0)}$ we have $p\in\prod_\xi G_\xi$, whence p_0 is an intemor point of $\prod_\xi G_\xi$; this proves that $\prod_\xi G_\xi$ is an open set.

The ω_μ-metric spaces were considered by Hausdorff [3], Cohen and Goffman[2], Sikorski[9], and others. l As Sikorski had pointed out in[9], many topologica theorems about separable metric spaces can be general ized to the present case, but some singularities concerning compactness and completeness may occur.

In the above, if A is the set of all real numbers and b) is replaced by

b') $\rho(p,q)=\rho(q,p)$,

then ρ is called a *pseudo-metric* on X . Let us call an *almost-metric space* each set X with a family $P = \{\rho_\xi\}$ of pseudo-metrics and satisfying

d) If for every $\rho_\xi \in P$ $\rho_\xi(p, q) = 0$, then $p = q$.

Moreover, we can assume that, for P, the following statement holds:

e) For every $\rho_{\xi 1}$, $\rho_{\xi 2} \in P$ there exist $\rho_\xi \in P$ such that $\rho_\xi(x, y) \geqslant \max\{\rho_{\xi 1}(x, y); \rho_{\xi 2}(x, y)\}$.

If the power of P is equal to m, X is called an *m—almost metric space*. One can introduce the topology for X by setting

$$\overline{X} = \prod_{\rho_\xi \in P} E[p; \rho_\xi(p, X) = 0],$$

where $X \subseteq X$, i.e. the family of sets $E[p; \rho_\xi(p, p_0) < d]$, where $p_0 \in X$, $d > 0$, $\rho_\xi \in P$, is a basis for this topology.

The m-almost-metric spaces were introduced and investigated by Mrowka[5-7], in fact, such spaces are equivalent in the sense of uniform and topological structure to the Hausdorff uniform spaces (for the terminology of Hausdorff uniform spaces, see[4], p. 180) with the basis of power m, i.e. a uniformity has a basis of the power m if and only if it is generated by a family of pseudo-metrics of power m.

For brevity, in the following sections, the topological space X is said to be a $(U)_m$-*space* if its topology can be

derived from a uniformity with a basis of power m, where m is supposed to be the smallest possible; the topological space X is said to be *ω_μ-metrisable*, if it is possible to define an ω_μ-metric ρ such that the topology induced by ρ agrees with the original topology of X. By the *basis* of X we always mean the open basis.

In the following two theorems, given by Mrowka, the original "X is an m-almost-metrisable space" is replaced by "X is a $(U)_m$-space".

THEOREM M_1. *A normal space X is a $(U)_m$-space if and only if it has an m-basis (i.e. this basis is formed by the union of at most m locally finite systems).*

THEOREM M_2. *A completely regular space X is a $(U)_m$-space if and only if there exist a basis $\{U\}$ and a family $\{f_u\}$ of continuous functions such that $0 \leqslant f_u(p) \leqslant 1$; $f_u(p) \equiv 1$ for $p \in U$ and the sets $\mathrm{E}[p; f_u(p) > 0]$ can be divided into a family of locally finite (discrete) systems of power at most m.*

The present paper is divided into the following four parts. In § 2 necessary and sufficient conditions for a $(U)_m$-space to be ω_μ-additive are obtained.

In § 3, we study the relationship between $(U)_m$-spaces and ω_μ-metrisable spaces.

In § 4, some necessary and sufficient conditions for an ω_μ-additive space to be ω_μ-metrisable are obtained. The well-known Nagata-Smirnov metrisation theorem is

contained in one of our theorems. Finally, some remarks on compactness and bicompactness are also made in § 5.

§ 2. The necessary and sufficient conditions for a $(U)_m$-space to be ω_μ-additive. We now prove

PROPOSITION 1. *If X is an ω_μ-additive space, then, unless X is discrete or $\mu=0$ (while every topological space is ω_0-additive), its topology cannot be derived from a uniformity with the basis of power $< |\omega_\mu|$.*

Proof. Let X be given as above. For our purpose it is only necessary to prove that its topology cannot be derived by a family of pseudometrics (in the sense of § 1) of power $< |\omega_\mu|$. Suppose it is not the case, i.e. its topology can be derived by a family of pseudo-metrics $P=\{\rho_\xi\}$ of power $< |\omega_\mu|$. Let p_0 be an arbitrarily given point of X. Then, if $\mu>0$, by

$$\mathbf{E}[p;\ \rho_\xi(p,p_0)=0]=\prod_{n=1}^{\infty}\mathbf{E}\left[p;\ \rho_\xi(p,p_0)<\frac{1}{n}\right],$$

we know that the set $\mathbf{E}[p;\ \rho_\xi(p,p_0)=0]$ is open, and by

$$\prod_{\rho_\xi\in P}\mathbf{E}[p;\ \rho_\xi(p,p_0)=0]=\{p_0\}$$

we know that the set $\{p_0\}$ is open, and hence, if $\mu>0$, X must be discrete, which contradicts the hypothesis of our proposition.

Thus, a $(U)_m$-space is ω_μ-additive (for $\mu>0$) only

when $m \geqslant |\omega_\mu|$ (1). It is natural to ask under what conditions the $(U)_m$-space X would be ω_μ-additive, where $m \geqslant |\omega_\mu|$.

Since every topological space (and hence every uniform space) is ω_0-additive, in the rest of this section $\mu > 0$ is assumed.

Let X be a set and $P = \{\rho_\xi\}$ a family of pseudo-metrics on X. Including in P the functions $d\rho_\xi$, $\max\{\rho_{\xi_1}, \cdots, \rho_{\xi_n}\}$ (where d is an arbitrary positive rational number, n a natural number and ρ_{ξ_i}, $\rho_\xi \in P$) we get a new family P^*, which is called the *completion* of P; for P^* we have a), b′), c), d), e), and the following:

f) For every positive rational d and $\rho_\xi \in P^*$, $d\rho_\xi \in P^*$.

DEFINITION 1. Let X, P be given as above. If, for every subfamily $P' \subseteq P$, $\overline{\overline{P'}} < m$ and every point $p_0 \in X$, there exist $\rho_\xi \in P$ and a neighbourhood $V(p_0)$ of p_0 such that $\rho_\xi(p,q) \geqslant \rho_\eta(p,q)$ holds for $\rho_\eta \in P'$ and p, $q \in V(p_0)$, then we say that P is an *m-locally direct family*.

THEOREM 1. *For a $(U)_m$-space X to be ω_μ-additive (where $\mu > 0$), it is necessary and sufficient that $m \geqslant \omega_\mu$ and its topology can be derived from a uniformity which is generated by a family of pseudo-metrics*

(1) Throughout the rest of the paper, topological spaces always mean nondiscrete topological spaces.

$P = \{\rho_\xi\}$ *such that the completion* P^* *is an* $|\omega_\mu|$ *-locally direct family.*

Proof. Sufficiency. Let $\{G_\xi\}, \xi < a$ $(a < \omega_\mu)$ be an α-sequence of open sets, P_0 an arbitrary point of $\prod_\xi G_\xi$. Then there exist a positive number d (by e) one can assume $d = 1$) and a subfamily $\{\rho_{\eta_\xi}\} \subseteq P^*$ such that

$$E[p;\ \rho_{\eta_\xi}(p,\ p_0) < 1] \subseteq G_\xi \quad \text{for} \quad 0 \leqslant \xi < \alpha.$$

By the $|\omega_\mu|$ -locally directness of P^*, there exist $\rho_\eta \in P^*$ and a neighbourhood $V(p_0)$ such that $\rho_\eta \geqslant \rho_{\eta_\xi}$ $(0 \leqslant \xi \leqslant \alpha)$ holds in $V(p_0)$. Then

$$V(p_0) \cdot E[p; P_\eta(p, p_0) < 1] \subseteq V(p_0). \prod_{0 \leqslant \xi < a} E[p; \rho_{\eta_\xi}(p, p_0 < 1]$$

$$\subseteq V(p_0) \cdot \prod_{0 \leqslant \xi < a} G_\xi \subseteq \prod_{0 \leqslant \xi < a} G_\xi;$$

this proves that p_0 is an interior point of $\prod_\xi G_\xi$, whence $\prod_\xi G_\xi$ is an open set.

Necessity. Let the uniformity of the $(U)_m$-space X be generated by a family P of pseudo-metrics; P^* is the completion of P. For an arbitrarily given $P' \subseteq P^*$ and if $\overline{\overline{P'}} < |\omega_\mu|$, let p_0 be an arbitrary point of X. Then the set

$$V(p_0) = \prod_{\rho_{\eta_\xi} \in P'} E[p;\ \rho_{\eta_\xi}(p, p_0) = 0] =$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{\rho_{\eta_\xi} \in P'} E\left[p;\ \rho_{\eta_\xi}(p,\ p_0) < \frac{1}{n}\right]$$

is an open set containing p_0, i.e. $V(p_0)$ is a neighbourhood of p_0 satisfying the condition that for every pair p, $q \in V(p_0)$ and every $\rho_\eta \in P^*$ we have $\rho_\eta(p, q) \geqslant \rho_{\eta_\xi}(p, q) = 0$. Therefore P^* is an $|\omega_\mu|$ -locally direct family.

DEFINITION 2. Let X, P be given as in def 1; if for every subfamily $P' \subseteq P$ with $\overline{\overline{P'}} < m$ and every point $p_0 \in X$, there exists a neighbourhood $V(p_0)$ of p_0 such that $\rho_{\eta_\xi}(p, q) \equiv 0$ for $\rho_{\eta_\xi} \in P'$ and p, $q \in V(p_0)$, then we say that P is an *m-locally zero family.*

A more convenient test to see if a $(U)_m$-space X is ω_μ-additive is the following

THEOREM 2. *For a $(U)_m$-space X to be ω_μ-additive, it is necessary and sufficient that $m \geqslant |\omega_\mu|$ and its topology can be derived from a uniformity which is generated by an $|\omega_\mu|$ -locally zero family of pseudo-metrics.*

Proof. Sufficiency. We observe that the completion P^* is also an $|\omega_\mu|$ -locally zero family; the sufficient part is a corollary of Theorem 1.

Necessity. The proof is completely the same as the proof of the necessary part of Theorem 1.

§3. The relationship between ω_μ-metrisable spaces and $(U)_m$-spaces. We now prove

PROPOSITION 2. *If X is an ω_μ-metrisable space and B is an open covering of X then there exists an $|\omega_\mu|$ discrete refinement B' of B (i.e. B' is the union of $|\omega_\mu|$ families of*

discrete open sets, $\boldsymbol{B}'$ is a covering of $\boldsymbol{X}$ and for every $U \in \boldsymbol{B}'$ there is a $V \in \boldsymbol{B}$ such that $U \subseteq V$). Moreover, for $\mu > 0$ we can require that $\boldsymbol{B}'$ be formed by sets both open and closed.

Proof. The first part is essentially the same as in the case of $\mu = 0$. Order the elements of $\boldsymbol{B}$ by the relation $<$. For each $U \in \boldsymbol{B}$ let(1) $U_\xi = \mathbf{E}[p;\ \rho(p,\ \boldsymbol{X}-U) > \varepsilon_\xi]$; then, $\rho(U_\xi,\ \boldsymbol{X}-U_{\xi+1}) > \varepsilon_\xi - \varepsilon_{\xi+1}$. We put $U'_\xi = U_\xi - \Sigma\{V_{\xi+1};\ V \in \boldsymbol{B}$ and $V < U\}$; since one of the relations $U < V$ and $V < U$ must hold, therefore if U, V are distinct elements of $\boldsymbol{B}$, we have $\rho(U'_\xi,\ V'_\xi) > \varepsilon_\xi - \varepsilon_{\xi+1}$. Choose two elements $\varepsilon'' < \varepsilon'$ of A such that $2\varepsilon' = \varepsilon' + \varepsilon' < \varepsilon_\xi - \varepsilon_{\xi+1}$ (to verify this possibility is easy), and define

$$U^\bullet_\xi = \mathbf{E}[p;\ \rho(p,\ U'_\xi) < \varepsilon'],$$

$$V^\bullet_\xi = \mathbf{E}[p;\ \rho(p,\ V'_\xi) < \varepsilon'],$$

$$U^{\bullet\bullet}_\xi = \mathbf{E}[p;\ \rho(p,\ U'_\xi) \leqslant \varepsilon''],$$

$$V^{\bullet\bullet}_\xi = \mathbf{E}[p;\ \rho(p,\ V'_\xi) \leqslant \varepsilon''].$$

Then $U^\bullet_\xi$ (and $V^\bullet_\xi$) *is* open and $U^{\bullet\bullet}_\xi$ $(V^{\bullet\bullet}_\xi)$ is closed, $U^{\bullet\bullet}_\xi \subseteq U^\bullet_\xi$. If $\mu > 0$, then there exists an open-closed set [9] $\widetilde{U}_\xi$ such that $U^\bullet_\xi \subseteq \widetilde{U}_\xi \subseteq U^{\bullet\bullet}_\xi$, In the following we prove that the family $\{\widetilde{U}^\bullet_\xi\}$ (or $\{U_\xi\}$, if $\mu > 0$), where $\xi < \omega_\mu$ and $U \in \boldsymbol{B}$, is required.

---

(1) The meaning of A and ε_ξ has been given in § 1.

Firstly, the sets $U_\xi^\bullet$ (or $\widetilde{U}_\xi$, if $\mu>0$) for fixed ξ are discrete. To prove this let $U \neq V$, U, $V \in \boldsymbol{B}$ and $p \in U_\xi^\bullet$, $q \in V_\xi^\bullet$ be arbitrarily given; then we have $\rho(p, U'_\xi) < \varepsilon'$ and $\rho(q, V'_\xi) < \varepsilon'$. From $\rho(U'_\xi, V'_\xi) < \varepsilon_\xi - \varepsilon_{\xi+1}$ it follows that $\rho(p, q) > (\varepsilon_\xi - \varepsilon_{\xi+1}) - 2\varepsilon' > 0$, i.e. $p \neq q$. Therefore $U_\xi^\bullet \cdot V_\xi^\bullet = \phi$. Secondly, let $p \in \boldsymbol{X}$ be an arbitrary point and let U be the first member of $\boldsymbol{B}$ to which p belongs. Then surely $p \in U_\xi^{\bullet\bullet}$ for some ξ, that is $p \in U'_\xi$ (for $\mu > 0$, $p \in \widetilde{U}_\xi$). Finally, it is evident that $U_\xi^\bullet \subset U$ (and $\widetilde{U}_\xi \subseteq U$ for $\mu>0$). Hence the family $\{U_\xi^\bullet\}$, or $\{\widetilde{U}_\xi^\bullet\}$ if $\mu>0$, is the required family.

THEOREM 3. *Every ω_μ-metrisable space $\boldsymbol{X}$ is a $(U)\,\omega_\mu$-space.*

Proof. By proposition 2, Theorem 3 follows from Theorem M_1 immediately. (By theorem (viii) of [9], X is a normal space).

It will be observed that Theorem 3 can be proved in a direct way.

THEOREM 4. *Every ω_μ-additive $(U)\,\omega_\mu$-space is ω_μ-metrisable.*

Proof. Let $\boldsymbol{X}$ be an ω_μ-additive $(U)\,\omega_\mu$-space. Then its topology can be derived from a family $\boldsymbol{P} = \{\rho_\xi\}$ of pseudo-metrics of power ω_μ.

If $\mu = 0$, then $\boldsymbol{P} = \{\rho_n\}$. Put

$$\rho(p,\ q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{1,\ \rho_n(p,q)\};$$

then ρ is a metric on $\boldsymbol{X}$, whence $\boldsymbol{X}$ is ω_0-metrisable. We now prove the case of $\mu>0$ as follows. Let A be the set of all ω_μ-sequences of real numbers. For every pair of elements $a,\ b \in A$, where

$$a = \{a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_\xi,\ \cdots\},$$

$$b = \{b_0,\ b_1,\ \cdots,\ b_\xi,\ \cdots\},$$

$\xi<\omega_\mu$, if there exists $\xi_0<\omega_\mu$ such that $a_\xi = b_\xi$ for $\xi<\xi_0$ but $a_{\xi_0}<b_{\xi_0}$, then we say that a is smaller than b, $a<b$. The sum and the difference are defined by $a\pm b = \{a_0\pm b_0\ \cdots,\ a_\xi\pm b_\xi,\ \cdots\}$.

It is not difficult to verify that A is an ordered group of character ω_μ : to see this we only take $\varepsilon_\xi = \{a_0^\xi, a_1^\xi, \cdots, a_\eta^\xi \cdots\}$, where $a_\eta^\xi = 0$ for $\eta<\xi$ and $a_\eta^\xi = 1$ for $\eta\geqslant\xi\ (\eta<\omega_\mu)$.

If $\mathbf{P} = \{\rho_\xi\}$, $\xi<\omega_\mu$, we put

$$\rho(p,\ q) = \{\rho_0(p,q),\ \cdots,\ \rho_\xi(p,q),\ \cdots\};$$

$\boldsymbol{X}$ is now an ω_μ-metric space, and we have to prove that its topology T^2 agrees with the original topology T^1. For brevity, by T^1 (or T^2)—open, we always mean a set which is open with respect to the topology T^1 (or T^2); the same applies to "T^1 (or T^2)—closed".

(I) The set $\mathbf{E}[p;\rho(p,p_0)<\varepsilon]$ is T^1—open for $\varepsilon \in A$, where $p_0 \in \boldsymbol{X}$ is arbitrarily given.

In fact, if $\varepsilon = \{a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_\xi,\ \cdots\}$ then (I) follows

from the equations $\dot{\mathbf{E}}[p;\ \rho(p,p_0)<\varepsilon]=\sum_{0\leqslant\eta<\omega\mu}\prod_{0\leqslant\xi<\eta}\mathbf{E}[p;\rho_\xi(p,p_0)=a_\xi]\cdot\mathbf{E}[q;\ \rho_\eta(q,p_0)<a_\eta]$,

and

$$\mathbf{E}[p;\ \rho_\xi(p,p_0)=a_\xi]$$

$$=\prod_{n=1}^{\infty}\mathbf{E}\left[p;\ \rho_\xi(p,p_0)>a_\xi-\frac{1}{n}\right]\cdot\mathbf{E}\left[p;\rho_\xi(p,p_0)<a+\frac{1}{n}\right]\cdot$$

(II) The sets $\mathbf{E}[p;\ \rho(p,p_0)<a_\eta]$ are T^2-open, where $p_0\in\ \boldsymbol{X}$, a_η is a positive real number $\eta<\omega_\mu$ and $\rho_\eta\in\mathbf{P}$. From

$$\mathbf{E}[p;\ \rho_\eta(p,p_0)<a_\eta]=\sum_{(a\xi)_{\xi<\eta}}\prod_{0\leqslant\xi<\eta}\mathbf{E}[p;\ \rho_\xi(p,p_0)=a_\xi]\cdot\mathbf{E}[p;\ \rho_\eta(p,p_0)<a_\eta]$$

t is evident that (II) follows from

(II′) For every $\eta<\omega_\mu$ and an arbitrary η-sequence $\{a_\xi\}$, $\xi<\eta$, the sets

$$(\varDelta)_\eta=\prod_{0\leqslant\xi<\eta}\mathbf{E}\,[p;\rho_\xi(p,p_0)=a_\xi]\cdot\mathbf{E}[p;\rho_\eta(p,p_0)<a_\eta]$$

and

$$(\varDelta)'_\eta=\prod_{0\leqslant\xi<\eta}\mathbf{E}\,[p;\rho_\xi(p,p_0)=a_\xi]\cdot\mathbf{E}[p;\rho_\eta(p,p_0)>a_\eta]$$

are both T^2-open and T^2-closed sets.

We prove it by the following two steps;

(a) The sets $\mathbf{E}[p;\rho_0(p,p_0)<a_0]$and $\mathbf{E}[p;\rho_0(p,p_0)>a_0]$ are both T^2-open-closed sets.

In fact, let $\varepsilon^{(n)}=\left\{a_0-\frac{1}{n},\ a_1,\ \cdots,\ a_\xi,\ \cdots\right\}$, where

$\xi<\omega_\mu$, and a_0, $\cdots$, a_ξ, $\cdots$are fixed as n varies; then

$$\mathbf{E}[p;\rho_0(p,p_0)<a_0]=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{E}[p;\rho(p,p_0)<\varepsilon^{(n)}],$$

which implies the T^2-openness of the set $\mathbf{E}\ [p;\rho_0(p,p_0)<a_0]$. (Similarly, the T^2-openness of $\mathbf{E}[p;\ \rho_0(p,p_0)>a_0]$ can be proved.) To prove that they are T^2-closed it suffices to take the complements, for example

$$\mathbf{E}[p;\ \rho_0(p,\ p_0)<a_0]=X-\prod_{n=1}^{\infty}\mathbf{E}\left[p;\ \rho_0(p,\ p_0)>a_0-\frac{1}{n}\right].$$

(b) By the principle of transfinite induction, assume that (II′) holds for all ordinals $\xi<\alpha$, to prove the case of $\alpha\,(\alpha<\omega_\mu)$.

(i) If α is an isolated ordinal, let $\varepsilon^{(n)}=\{a_\xi^{(n)}\}$, where $\xi<\omega_\mu$ and $a_\xi^{(n)}=a_\xi$ for $\xi\neq\alpha$ and $a_\alpha^{(n)}=a_\alpha-\frac{1}{n}$; then

$$\mathbf{E}[p;\ \rho(p,p_0)<\varepsilon^{(n)}]$$
$$=\sum_{0\leq\eta<\omega_\mu}\prod_{0\leq\xi<\eta}\mathbf{E}[p;\rho_\xi(p,p_0)=a_\xi^{(n)}]\cdot\mathbf{E}[p;\rho_\eta(p,p_0)<a_\eta^{(n)}].$$

Subtracting from the above set the following T^2-closed set (hypothesis of (b))

$$\sum_{0\leq\eta<\alpha}\prod_{0\leq\xi<\eta}\mathbf{E}[p;\ \rho_\xi(p,p_0)=a_\xi^{(n)}]\cdot\mathbf{E}[p;\ \rho_\eta(p,p_0)<a_\eta^{(n)}]$$

one obtains the following T^2-open set:

$$\sum_{\alpha\leq\eta<\omega_\mu}\prod_{0\leq\xi>\eta}\mathbf{E}[p;\ \rho_\xi(p,p_0)=a_\xi^{(n)}]\cdot\mathbf{E}[p;\ \rho_\eta(p,p_0)<a_\eta^{(n)}];$$

its union with respect to n, $a_{\alpha+1}$, $\cdots$, a_ξ, $\cdots(\xi<\omega_\mu)$, is the T^2-open set $(\Delta)_\alpha$. In a similar way one can prove that $(\Delta)'_\alpha$ is T^2-open.

By taking the complements we can prove that the sets $(\Delta)_\alpha$ and $(\Delta)'_\alpha$ are T^2-closed, e.g. from

$$\prod_{0\leqslant\xi<\eta}\mathbf{E}[p;\ \rho_\xi(p,\ p_0)=a_\xi]\cdot\mathbf{E}[p;\ \rho_\eta(p,\ p)\geqslant a_\eta]$$

$$=\prod_{n=1}^{\infty}\prod_{0\leqslant\xi<\eta}\mathbf{E}\left[p;\ \rho_\xi(p,\ p_0)>a_\xi-\frac{1}{n}\right]\cdot$$

$$\cdot\mathbf{E}\left[p;\ \rho_\xi(p,\ p_0)<a_\xi+\frac{1}{n}\right]\cdot\mathbf{E}\left[p;\ \rho_\eta(p,p_0)>a_\eta-\frac{1}{n}\right];$$

and

$$X-(\Delta)_\alpha=\sum_{0\leqslant\xi<\alpha}\mathbf{E}[p;\ \rho_\xi(p,\ p_0)>a_\xi]$$

$$+\sum_{0\leqslant\xi<\alpha}\mathbf{E}[p;\ \rho_\xi(p,\ p_0)<a_\xi]+\prod_{0\leqslant\xi<\alpha}\mathbf{E}[p;\ \rho_\xi(p,\ p_0)=a_\xi]\cdot$$

$$\cdot\mathbf{E}[p;\ \rho_\alpha(p,p_0)\geqslant a_\alpha],$$

one can prove that $(\Delta)_\alpha$ is T^2-closed.

(ii) If α is a limit ordinal, then from the following equation

$$\prod_{0\leqslant\xi<\eta}\mathbf{E}[p;\ \rho_\xi(p,p_0)=a_\xi]\cdot\mathbf{E}[p;\ \rho_\eta(p,p_0)\leqslant a_\eta]=$$

$$=\prod_{n=1}\prod_{0\leqslant\xi<\eta}\mathbf{E}[p;\ \rho_\xi(p,\ p_0)=a_\xi]\cdot$$

$$\cdot\mathbf{E}\left[p;\ \rho_\eta(p,\ p_0)<a_\eta+\frac{1}{n}\right],$$

and by the hypothesis of (b), we know that, for each $\eta<\alpha$, the set

$$\prod_{0\leq\xi<\eta} \mathbf{E}[p;\ \rho_\xi(p,\ p_0)=a_\xi]\cdot\mathbf{E}[p;\ \rho_\eta(p,\ p_0)\leqslant a_\eta]$$

is a T^2-open set. By intersecting the above sets with respect to $\eta<\alpha$ we obtain the following T^2-open set:

$$\prod_{0\leq\xi<\alpha} \mathbf{E}[p;\ \rho_\xi(p,\ p_0)=a_\xi].$$

The interseetion of the above set with the T^2-open set $\mathbf{E}[p;\ \rho(p,\ p_0)<\varepsilon^{(n)}]$where $\varepsilon^{(n)}$assumes the same meaning as in(i), is the following T^2-open set:

$$\sum_{\alpha\leq\eta<\omega\mu}\ \prod_{0\leq\xi<\eta} \mathbf{E}[p;\ \rho_\xi(p,\ p_0)=a^{(n)}_\xi]\cdot\mathbf{E}[p;\rho_\eta(p,\ p_0)<a^{(n)}_\eta];$$

by making a union of the above sets with respect to n, $a_{\alpha+1}$, $\cdots$, the T^2-open set $(\varDelta)_\alpha$ is obtained. In a similar way one can prove that $(\varDelta)'_\alpha$ is T^2-open.

The proof that $(\varDelta)_\alpha$ and $(\varDelta)'_\alpha$ are T^2-closed sets is completely the same as in case (i), whence it is omitted here.

From Theorems 3 and 4 we have

THEOREM 5. *ω_μ-metrisable spaces and ω_μ-additive $(U)_{|\omega_\mu|}$ spaces arc identical, in particular ω_0-metrisable spaces and ordinary metrisable spaces are identical.*

§ **4. ω_μ-metrisation theorems**(1). We prove

THEOREM 6. *For a regular ω_μ-additive spaceto be ω_μ-metrisable, it is necessary and sufficient that there*

---

(1) Let us observe that in our metrisation theorems the notion of ordered algebraic field (see [9], p. 129) W_μ is not used.

exist an $|\omega_\mu|$ -basis.

Let us recall that the family $\boldsymbol{B}$ of open sets is called an $|\omega_\mu|$ *-basis* of the topological space if $\boldsymbol{B}$ is a basis and $\boldsymbol{X}$ can be written as $\boldsymbol{B}=\sum_{0<\alpha<\omega_\mu}\boldsymbol{B}_\alpha$, where $\boldsymbol{B}_\alpha$ are locally finite systems of open sets.

Proof of Theorem 6. As the necessary part has been contained in the proof of proposition 2, we need to prove the sufficient part only.

From Theorems 5 and M_1, we need only to prove that $\boldsymbol{X}$ is a normal space (this is an improvement of theorem (vii) of [9]).

In fact, let F_1 and F_2 be disjointed closed sets; since $\boldsymbol{X}$ is regular, for every pair of points $p\in F_1, q\in F_2$ there exist neighbourhoods $U_p\in\boldsymbol{B}_{\xi(p)}$ and $U_q\in\boldsymbol{B}_{\xi(q)}$) such that $\overline{U}_p\cdot F_2=0$ and $\overline{U}_q\cdot F_1=0$. Let $U_\eta^{(1)}=\sum_{\xi(p)=\eta}U_p$ and $U_\eta^{(2)}=\sum_{\xi(q)=\eta}U_q$ ($p\in F_1$ and $q\in F_2$); then $\overline{U_\eta^{(1)}}=\sum_{\xi(p)=\eta}\overline{U}_p$ and $\overline{U}_\eta^{(2)}=\sum_{\xi(q)=\eta}\overline{U}_q$ since $\boldsymbol{B}_\eta$ is a locally finite family.

Put

$$U_\xi^{\bullet}=U_\xi^{(1)}-\sum_{\eta<\xi}\overline{U}_\eta^{(2)},\quad U_\xi^{\bullet\bullet}=U_\xi^{(2)}-\sum_{\eta<\xi}\overline{U}_\eta^{(1)},$$

$$U^{\bullet}=\sum_{0<\xi<\omega\mu}U_\xi^{\bullet},\qquad U^{\bullet\bullet}=\sum_{0<\xi<\omega\mu}U_\xi^{\bullet\bullet}.$$

The sets $U^\bullet$ and $U^{\bullet\bullet}$ are disjointed open sets containing F_1 and F_2 respectively. Thus $\boldsymbol{X}$ is normal. Therefore,

theorem 6 is proved.

COROLLARY 1 (R. Sikorski [9]). *If X is an ω_μ-additive normal space with a basis of power $|\omega_\mu|$, then X is ω_μ-metrisable.*

COROLLARY 2 (Nagata-Smirnov). *For a regular space to be metrisable, it is necessary and sufficient that there exist an $|\omega_0|$-basis.*

THEOREM 7. *For $\mu>0$, for an ω_μ-additive space to be ω_μ-metrisable it is necessary and sufficient that there exist an $|\omega_\mu|$-basis consisting of sets both open and closed.*

Proof. Necessity. It is contained in the proof of proposition 2.

Sufficiency [1]. Let $\boldsymbol{B}$ be an $|\omega_\mu|$-basis of X and let $\boldsymbol{B} = \sum_{0\leq\xi<\omega\mu} \boldsymbol{B}_\xi$ where $\boldsymbol{B}_\xi$ are locally finite (discrete) systems consisting of open-closed sets (Proposition 2). For $U \in \boldsymbol{B}_\xi$ define

$$f_U(p) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad p \in U, \\ 0 & \text{for} \quad p \in U. \end{cases}$$

The family $P = \{\max(\rho_{\xi_1}, \cdots, \rho_{\xi_n})\}$ of functions,

$$\rho_{\xi i}(p, q) = \sum_{U \in B_{\xi i}} |f_U(p) - f_U(q)|,$$

makes X as $|\omega_\mu|$-almost metric space its topology is the same as the original. In fact, the ρ_ξ are continuous fun-

(1) The proof given here is not based on Theorem M_1.

ctions by the local finiteness of $\boldsymbol{B}_\xi$. Conversely, for an arbitrarily given open set G and $p_0 \in G$, one can find $U \in \boldsymbol{B}_\xi$ (for some ξ) such that $p_0 \in U \subseteq G$, whence $\rho_\xi(p_0, X - U) \geqslant 1$ and therfore $\mathbf{E}[p;\ \rho_\xi(p,\ p_0) < 1] \subseteq U \subseteq G$. Thus, X is an ω_μ-additive $(U)_{|\omega_\mu|}$-space, and theorem 7 follows from Th. 4 (or Th. 5) immediately.

From theorem 7 we can derive some results which are closely related to Theorem M_2.

COROLLARY 1. *For $\mu > 0$, for an ω_μ-additive space X to be ω_μ-metrisable it is necessary and sufficient that there exist a collection of families of continuous functions $P = \{P_\xi\}$ and $P_\xi = \{f_\eta^\xi\}$, where $\xi < \omega_\mu$, such that the families of sets $\mathbf{E}[p;\ f_\eta^\xi(p) > 0]$ for fixed ξ are locally finite (discrete) systems, and the family of sets $\mathbf{E}[p;\ f_\eta^\xi(p) > 1]$ (where $\xi < \omega_\mu$ and $f_\eta^\xi \in P_\xi$) is a basis of X.*

Proof. Necessity. It suffices to put in theorem 7

$$f_U(p) = \begin{cases} 2 & \text{for} \quad p \in U, \\ 0 & \text{for} \quad p \in U, \end{cases} \quad \text{for every } U \in \boldsymbol{B}_\xi,\ \xi < \omega_\mu.$$

Sufficiency. The families of sets $\mathbf{E}[p;\ f_\eta^\xi(p) > 1]$, for fixed ξ, are locally finite systems, consisting of sets both open and closed:

$$\mathbf{E}[p; f_\eta^\xi(p) > 1] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}\left[[p;\ f_\eta^\xi(p) \geqslant 1 + \frac{1}{n}\right].$$

COROLLARY 2. *For an ω_μ-additive space to be ω_μ-*

metrisable, it is necessary and sufficient that there is a family of functions $\{f_U\}$ *which are continuous and* $0 \leqslant f_U(p) \leqslant 1$ *and that the family of sefs* $\mathbf{E}[p; f_U(p) > 0]$ *form an* $|\omega_\mu|$ *-basis of* $\boldsymbol{X}$.

proof. Sufficiency. Completely the same as the proof of the sufficient part of theorem 7.

Necessity. The case $\mu > 0$ is contained in theorem 7. Let $\mu = 0$, and let $\boldsymbol{B}$ be an $|\omega_0|$ -basis of $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{B} = \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{B}_n$, where $\boldsymbol{B}_n$ are locally finite (discrete) systems. For $U \in \boldsymbol{B}$ we put

$$f_U(p) = \rho(p, \boldsymbol{X} - U),$$

where ρ is the metric function of $\boldsymbol{X}$. Then $\{f_U\}$ fulfils the requirement of Cor. 2.

§ **5. Compactness and bicompactness.** The terminology of compactness and bicompactness has been given by Sikorski [9]. We say that the topological space $\boldsymbol{X}$ has the $|\omega_\mu|$ *-Lindelof property*, if from every covering of $\boldsymbol{X}$ one can select a subcovering of power $\leqslant |\omega_\mu|$.

PROPOSITION 3. *If* $\boldsymbol{X}$ *is a regular* ω_μ*-additive space which has the* $|\omega_\mu|$*-Lindelof property, then* $\boldsymbol{X}$ *is normal.*

Proof. It is completely the same as in the case of $\mu = 0$, which is classical and well known [4], p. 113), and whence omitted.

The above proposition was given by Parovicenko in [8].

THEOREM 8. *If* X *is an* ω_μ*-metric space and is compact (in the sense of* [9]), *then* X *has a basis of power* $\leqslant |\omega_\mu|$ *, whence is bicompact (in the sense of* [9]).

Proof. By Th. 3, X is a $(U)_{|\omega_\mu|}$-space. Since X is compact, every subset X of power $\geqslant |\omega_\mu|$ has in X a contact point of order $\geqslant 2$ (p_0 being a *contact point* of X of order $\geqslant 2$ means that for every neighbourhood $V(p_0)$ of p_0 the set $X \cdot V(p_0)$ contains at least two points of X, [10]), then from Theorem of [10], X has a basis of power $\leqslant |\omega_\mu|$. Then Th. 8 follows from Lemma 2 of [10 immediately.

Recalling Cor. 1 of Th. 6, we have the following

THEOREM 9. *For a Hausdorff* ω_μ*-additive compact (in the sense of* [9]) *space to be* ω_μ*-metrisable, it is necessary and sufficient that it have a basis of power* $\leqslant |\omega_\mu|$.

Proof. Sufficiency. Follows from Th. 6 immediately.

Necessity. Follows from Th. 8 immediately.

The case $\mu = 0$ of this theorem is the well-know second metrisation theorem of P. Urysohn.

The author cordially thanks for the criticism and corrections made the reviewier.

References

[1] L. W. Cohen and C. Goffman, *A theory of transfinite convergence*, Trans. Amer. Math. Soc. 66(1949), pp. 65-74.

[2] —*The theory of ordered Abelian groups*, ibidem 67(1949), pp. 310-319.

[3] F. Hausdorff, *Grundzuge der Mengenlehre*, Leipzig 1914.

[4] J. L. Kelley, *General topology*, New York 1955.

[5] S. Mrowka, *On almost metric spaces*, Bull. Acad. Pol. Sci., Cl. lll, 5.2(1957). pp. 122-127.

[6] —*Remark on locally finite systems*, ibidem 5.2 (1957), pp. 129-132.

[7] —*A necessary and sufficient condition for m-almost metrisability*, ibidem 5.6(1957), pp. 627-629.

[8] И. И. Паровиченко, Доклады Акад Наук СССР 115 (1957), pp. 866-868.

[9] R. Sikorski, *Remarks on some topological spaces of high power*, Fund. Math. 37(1950), pp. 125-136.

[10] Wang Shu-tang, *On a theorem for the uniform spaces*, Sci. Record, New Series, 2. 10(1958), pp. 338-342.

ω_μ-可加拓扑空间(II)
——连续映像初论*

王 戍 堂

摘 要

本文接续文[6]. 文中主要定义了超限函数列的极限概念，研究推广了 Arzela-Ascoli 定理等.

波兰学者 R. Sikorski 于 1950 年引入一种特殊的拓扑空间[1]，称作 ω_μ-可加的空间[1)]，并在布尔代数理论中得到了应用；苏联的И. Паровиченко 于1957 年重新提出同样的空间概念[2]；美国的 L. Gillman 与 M. Henriksen 在研究连续函数环的理论时也已感到这种空间的需要[3]. 实际从历史上，这种空间的考虑可源朔到 F. Hausdorff (1914)[4] 与 L. Cohen, C. Goffman (1949)[5] 等人. 与上述概念相联系，[1]、[4]、[5] 考虑了距离空间的推广并提出了 ω_μ-距离空间的概念. 拙文[6]

* 本文作于 1963 年，未发表.

(1) ω_μ 恒表示规则的初始序数.

较详细地研究过这种空间，并且解决了 Sikorski 遗留下来的 ω_μ-距离化问题，从而推广了著名的 Nagata-Смирнов 定理。

本文是[1]、[6]的继续，目的在于研究关于这种空间的连续映象问题。至于用到的名词定义等，除了上述二文以外还要参考关肇直先生的“拓扑空间概论”一书[7]。

本文内容分为两部分。Ⅰ．研究由 ω_μ-可加空间 X 向拓扑空间 Y 的连续映象。于此得到 W. Sierpinski 定理和樊畿定理[7]的有趣补充和加强。其次，利用拙文[8]的结果将 Sikorski 关于致密 ω_μ-距离空间的定义加以变形，因而得到古典“一致连续性定理”的推广。Ⅱ．研究（由 ω_μ-可加空间 X 向正则空间 Y 的）连续映象的 α-列。首先定义这种序列的极限，然后讨论极限的连续性，定义方式是自然的。这种研究补充了 Gillman 与 Henriksen 的工作[3]，取得较为满意的结果。本文最后一部分，则是 Arzela-Ascoli 经典定理的推广。

作者感谢杨永芳教授的鼓励与帮助。

I

设 R 是任一拓扑空间，$x\in R$ 而$\{V_x\}$是 x 的一族邻域，如果它们的交 $\Pi V_x=\{x\}$时，即称$\{V_x\}$是 R 在 x 处的一个伪基。对于每个伪基都对应着一个势$\overline{\overline{\{V_k\}}}=u$，所有这种 u 的最小者 $\psi_R(x)$称为 R 在 x 处的伪特征数。（以上定义可于［7］中查到）。

定理 1. 设 X 是 ω_μ-可加空间而 Y 是一般拓扑空间，但对 $y\in Y$ 恒有 $\psi_Y(y)<\omega_\mu$；又设 f 是由 X 向 Y 的连续映象。此时对每点 $x_0\in X$ 都存在一个邻域 $V^*_{x_0}$，使得当 $x, x'\in V^*_{x_0}$ 时 $f(x)=f(x')$，其中 $\mu>0$。

证．设 $y_0=f(x_0)$，由于 $\psi_Y(y_0)<\omega_\mu$ 于是存在一个伪基 $\{W_{y_0}\}$，其势 $<\omega_\mu$．不失一般性，可以认为所有 W_{y_0} 都是开集，于是 $f^{-1}(W_{y_0})$ 也是开集设为 V_{x_0}，于是 $V^*_{x_0}=\Pi V_{x_0}$ 便是点 x_0 的邻域，且当 x，$x'\in V^*_{x_0}$ 时 $f(x)=f(x')$．于是定理得证．

在特殊场合，定理1及其逆曾为 Gillman 与 Henriksen 得到（[3]，定理 4.2）．

定理 2． 设 X、Y 的假定同前．如果 X 是连通的，则每个由 X 向 Y 内的连续映象 f 都是平凡映象，即对 $a,b\in X$ 恒有 $f(a)=f(b)$ 成立．其中 $\mu>0$．

证．接续定理 1，对每个点 $x\in X$ 曾求得一邻域 V_x 使 f 限制在 V_x 时成为平凡映象．今设 $a,b\in X$ 是任意二点，由于 X 的连通性，故樊畿的一条定理（[7]，54 页定理 2）得知存在一有限点列 $x_1=a$，$x_2,\cdots,x_n=b$ 使得 $x_i\in X$ 且有 $Vx_i\cdot Vx_{i+1}\neq\phi(1\leqslant i\leqslant n-1)$．令于 $Vx_i\cdot Vx_{i+1}$ 内任取点 x_i^*．于是：由 x_1^*，$x_2^*\in V_{x_2}$ 及 V_{x_2} 的定义得 $f(x_1^*)=f(x_2^*)$；又由 x_2^*，$x_3^*\in V_{x_3}$ 以及 V_{x_3} 的意义 $f(x_2^*)=f(x_3^*)$；…．因此 $f(x_1^*)=f(x_2^*)=\cdots=f(x_{n-1}^*)$，更由 $x_1^*\in V_{x_1}$ 及 $x_{n-1}^*\in V_{x_n}$ 便知 $f(x_1)=f(x_n)$ 此即 $f(a)=f(b)$．于是定理 2 得证．

定理 3． X 及 Y 的假定同于定理 1，欲使由 X 向 Y 的非平凡连续映象存在，其充要条件是 X 为非连通的．

证．必要性部分见于定理 2．

充分性．设 $X=X_1+X_2$，其中 X_1，X_2 是非空闭集而且 $X_1\cdot X_2=\phi$．任取二点 y_1，$y_2\in Y$[1]，则下述映象

(1) 本文中 X，Y 为单点集的场合是除外的．

$$f(x)=\begin{cases}y_1, & \text{当 } x\in X_1;\\ y_2, & \text{当 } x\in X_2\end{cases}$$ 就是所求者。

注. 判断拓扑空间连通性的 Sierpinski 定理是：拓扑空间 X 为连通的充要条件是其具有达尔布性质，即是每个定义于 X 的连续函数 f 及任意二点 $a,b\in X$, $f(x)$ 于 X 上必能取到 $f(a)$, $f(b)$ 间的一切值. 樊畿定理则是：为了拓扑空间 X 是连通的，必须且只须下边条件成立：对于定义于 X 上的连续函数及任意正数 ε，取 X 中任意二点 a 与 b，则一定存在 X 中的有限个点 $x_1=a$, x_2, $\cdots$, $x_n=b$ 使 $|f(x_{i+1})-f(x_i)|<\varepsilon$ $(1\leqslant i\leqslant n-1)$.

但由定理 3，当 $\mu>0$ 时上述二定理将有下列的加强。

定理 3′. 设 $\mu>0$，X 是 ω_μ-可加的空间. 则 X 成为连通空间的充要条件是，每个定义于 X 的连续函数 $f(x)$ 都必恒等于一常数：$f(x)=C$。

现在我们来研究由 ω_μ-距离空间 X 向 ω_μ-距离空间 Y 的连续映象。

Sikorski 曾提出致密 ω_μ-距离空间的概念，为了便于读者的阅读兹将其录记于下：

定义 1. ω_μ-距离空间 X 称作致密的，是指：X 内任何 ω_μ-点列 $\{p_\xi\}$ 中必包含收敛于 X 中某点 p 的子列 $\{p_{\eta_\xi}\}$，其中 ξ, $\eta<\omega_\mu$.

定义 2[8]. 设 X 是拓扑空间而 $E\subseteq X$ 及 $x\in X$，如果 x 的每个邻域 V_x 与 E 的交集的势 $\overline{\overline{V_x\cdot E}}\geqslant m$ 时，即称 x 是 E 的级 $\geqslant m$ 的触点。

命题. ω_μ-距离空间是致密的充要条件是：势 $\geqslant\omega_\mu$ 的集 $E\subseteq X$ 于 X 恒有级 $\geqslant 2$ 的触点。

证. 条件的必要性是显然的. 以下证明充分性. 证明之前注意，若 x 是 E 的级$\geqslant 2$ 的触点，则x 也是 E 的 级$\geqslant\omega_\mu$ 的 触点.

今设$\{p_\xi\}$是 X 的ω_μ-点列，现在证明它必含一收敛子列$\{p_{\eta_\xi}\}$，其中 ξ，$\eta_\xi<\omega_\mu$. 为此分作以下两种情况：

1) 若$\{p_\xi\}$中不同元素的势（或说个数）$\geqslant\omega_\mu$，则据题设及上边注意即知 X 必含其一级$\geqslant\omega_\mu$ 的触点 $p\in X$，因此于$\{p_\xi\}$中能选出收敛于点 p 的子列来（方式是习知的）.

2) 若$\{p_\xi\}$中不同元素的势$<\omega_\mu$，我们证明必有子列$\{p_{\eta_\xi}\}$使$p_{\eta_0}=\cdots=p_{\eta_\xi}=\cdots=p$，于是$\{p_{\eta_\xi}\}$便是所求的.

实际上，若其不然，即对于每个 p_ξ 都存在序数 $\alpha_\xi(\alpha_\xi<\omega_\mu)$，当 $\eta\geqslant\alpha_\xi$ 时恒有 $p_\eta\neq p_\xi$. 我们假定 α_ξ 是满足这些条件之最小者，并设 $\alpha=\sup\{\alpha_\xi\}$（由于 $\alpha_\xi<\omega_\mu$ 且这些 α_ξ 的个数$<\omega_\mu$）则 $\alpha<\omega_\mu$，这末一来，则当 $\xi<\omega_\mu$ 时恒有 $p_\xi\neq p_\alpha$，于是得到不合理的结果 $p_\alpha\neq p_\alpha$. 由此得知命题的成立.

以下将定义 1 作一些变形，得到：

定理 4. 对于ω_μ-距离空间X，下列命题(i)—(iv)等价(其中 $\mu\geqslant 0$)：

(i) X 是致密的；

(ii) 设 $E\subseteq X$ 而且 $\overline{\overline{E}}\geqslant\omega_\mu$，则 E 于 X 有级$\geqslant\omega_\mu$ 的触点；

(iii) 设 $E\subseteq X$ 且 $\overline{\overline{E}}\geqslant\omega_\mu$，则 E 于 X 有级$\geqslant 2$ 的触点；

(iv) X 的任意开复盖中含有势$\leqslant\omega_\mu$ 子复盖.

证. 前三条性质的等价性已见于以前命题，因此只须证明(ii)→(iv)→(iii)就行了.

(ii)→(iv). 注意到 X 是具势$\leqslant\omega_\mu$ 一致基的一致空间，此

即[8]之定理 6.

(iv)→(iii). 方法是习知的，见文[8]引理1.

对于由 ω_μ-距离空间 X 向 ω_μ-距离空间 Y 的映象我们要引进一致连续性的概念.

定义 3. 设 X 及 Y 各是 ω_μ- 及 ω_ν-距离空间，定义距离的序群[1]分别是 A 及 B；f 是由 X 向 Y 的映象且满足条件：对于 $\varepsilon\in B$ 当 $\varepsilon>0$ 时恒存在 $\delta\in A$，$\delta>0$：只要 $\rho_X(x,x')<\delta$ 的话便有 $\rho_Y(f(x),f(x'))<\varepsilon$（其中 $x,x'\in X$；ρ_X，ρ_Y 分别表示 X，Y 的距离函数）. 我们便说 f 是由 X 向 Y 的一致连续映象.

于是利用定理 4 便可将古典的"一致连续性定理"作如下的推广：

定理 5. 每个由致密 ω_μ-距离空间 X 向 ω_μ-距离空间 Y 的连续映象 f 都是一致连续的.

有了定理 4 以后，证明的步骤便完全是已知的（例如见[9]，92 页之定理 5），故从略.

Ⅱ

现在我们来考虑由拓扑空间 X 向拓扑空间 Y 的连续映象 α-列$\{f_\xi\}$，其中 $\alpha<\omega_\mu$ 而 $\xi<\alpha$.

定义 4. 我们说$\{f_\xi(x)\}$向 $f(x)$ 收敛是指：对 $f(x)$ 的任意邻域 V 都存在序数 $\eta<\alpha$，使当 $\xi\geqslant\eta$ 时 $f_\xi(x)\in V$.

当取 $\alpha=\omega_0$ 时，这就是普通函数列的收敛. 又设 α 是孤立序数时，则 $f_{\alpha-1}$ 就是$\{f_\xi\}$的极限映象.

首先证明

定理 6. 设 X 是 ω_μ-可加空间而 Y 是豪斯道夫正则空间，

其中 $\mu>0$；设$\{f_\xi\}$是由 X 向 Y 的连续映象 α-列，并且极限 f 存在。于是 $\alpha<\omega_\mu$ 时 f 必是连续映象。

证．只须证明对任意 $x\in X$ 及开集 $V\ni f(x)$ 恒存在 x 的邻域 U 使得 $f(U)\subseteq V$ 就行了。由于 Y 是正则空间故存在开集 $V^*\subseteq Y$ 使得对于充分大的 ξ，$f_\xi(x)\in V^*\subseteq\overline{V^*}\subseteq V$。其次，对于每个 f_ξ，由于它是连续映象，故存在着开集 $U_\xi\subseteq X$ 使 $x\in U_\xi$ 且 $f(U_\xi)\subseteq V^*$。于是 $U=\prod\limits_{\xi<\alpha}U_\xi$ 便是 x 的开邻域而

$f(U)\subseteq\prod\limits_{\xi<\alpha}f(U_\xi)\subseteq\overline{V^*}\subseteq V$。于是定理得证。

有趣的是，在一定条件下定理 6 的逆成立

定理 7. 设 X 是 0 维拓扑空间，Y 是 Hausdorff 空间。如果凡是由 X 向 Y 的连续映象 α-列的极限（当其存在时）f 都连续，其中 α 是$<\omega_\mu$ 的任意序数，则 X 必是 ω_μ-可加的。

证．由于 X 是 0 维的，所以 X 中所有既开且闭的集生成一个拓扑基底。设$\{G_\xi\}$是任意的开集 α-列，其中 $\alpha<\omega_\mu$ 而$\xi<\alpha$。于是 $G_\xi=\sum\limits_{\eta\in A_\xi}U_\eta^\xi$，其中 U_η^ξ 是开闭集，A_ξ 则表示有赖于 ξ 的某个序数集合(指标集)；再设 A 表示笛卡尔乘积 $A=\times_\xi A_\xi$，于是下式成立：

$$\prod_{\xi<\alpha}G_\xi=\prod_{\xi<\alpha}\sum_{\eta\in A_\xi}U_\eta^\xi=\sum_{\bar\eta\in A}\prod_{\xi<\alpha}U_{\eta_\xi}^\xi,$$

其中 $\overline{\eta}=\{\eta_\xi\}$是 η_ξ 的 α-列($\eta_\xi\in A_\xi$)。由此即知，为了证明定理只须证明 X 中开闭集 α-列的交集恒是开集就行了。用反证法，设其不然，即是存在序数 $\alpha<\omega_\mu$ 及开集列$\{G_\xi\}$，$\xi<\alpha$ 使得$\{U_\xi\}$的任意截段列$\{G_\xi\}$，$\xi<\beta$ 而 $\beta<\alpha$，的交 $\prod\limits_{\xi<\beta}G_\xi$ 是开

集，但 $\prod_{\xi<\alpha} G_\xi$ 不是开集。显然可以认为它是单调下降序列：$\xi<\eta$ 时 $U_\xi \supseteq U_\eta$。今于 Y 任取二点 $y_1 \neq y_2$，并置

$$f_\xi(x)=\begin{cases} y_1, & \text{当 } x\in G_\xi \text{ 时；} \\ y_2, & \text{当 } x \overline{\in} G_\xi \text{ 时。}\end{cases}$$

其中 $\xi<\alpha$。于是$\{f_\xi\}$便是一连续映象α-列，极限映象 f 由下式给出：

$$f(x)=\begin{cases} y_1, & \text{当 } x\in \prod_{\xi<\alpha} G_\xi \text{ 时；} \\ y_2, & \text{当 } x \overline{\in} \prod_{\xi<\alpha} G_\xi \text{ 时。}\end{cases}$$

由于 $\prod_{\xi<\alpha} G_\xi$ 不是开集，而 Y 又是 Hausdorff 空间，故 f 不是连续映象，这与题设条件矛盾。由此即知定理的成立。证明完毕。

为了说明定理 6，7 的意义，特作如下注释：

注．1) Sikorski 曾证明（[1]，定理(iv)）：凡正则的 ω_μ-可加空间 X，当 $\mu>0$ 时，必是 0 维的。那末自然要问：怎样的 0 维正则空间才是 ω_μ-可加的呢？对此，下列定理也许是值得提出的：

定理 8. 设 X 是正则 Hausdorff 空间，则下列二个命题等价：

(i) X 是 ω_μ-可加的；

(ii) X 是零维的，而且于 X 上定义的任何连续函数 α-列的极限函数，当其存在时，都连续。其中 α 可取 $<\omega_\mu$ 的一切序数值。

2) 关于用连续函数作工具来研究空间拓扑性质时，有苏联、美国及日本等数学家们的大量工作，最近这方面具有总结意义的专著也已出版[10]。美国 Gillman 与 Henriksen 就曾用定义在完全正则空间上连续函数的代数性质，来刻划其 ω_1-可

加性。定理 8 则是从另一角度来研究空间的 ω_μ-可加性，为此须注意：X 是 0 维的充要条件是：存在一族连续函数 $\{f_\xi\}$ 使得 $\{U_\xi : U_\xi = \underset{x}{E}[f_\xi(x) = 0]\}$ 形成 X 的拓扑基底。

定理 8 显然比文[3]这方面的工作广泛。

初等分析中的亚一致收敛性及 Arzela 定理也可以推广，由于方法没有多大变动的地方，故从略。

最后，让我们来考察空间 Y^X 的 ω_μ-致密性，其中 X 及 Y 都是致密的 ω_μ-距离空间（以下结论只须稍加修改便适用于 Y 是一般 ω_ν-致密距离空间的场合，而不必有 $\mu=\nu$），Y^X 表示所有由 X 向 Y 连续映象的集合，而对于 $f,g\in Y^X$ 则定义 $\rho(f,g)=\sup\limits_{x\in X}\rho_Y[f(x),g(x)]$。可以证明，此时 Y^X 成为完备的 ω_μ-距离空间：其中每一个 ω_μ-基本列[1]都是收敛列，它显然是古典空间 $C_{[a,b]}$ 的推广。我们说 Y^X 中某集 F 是 ω_μ-列紧的，是指 F 的任何 ω_μ-列都包含着收敛子列，也就是 F 的任何一个势 $\geqslant\omega_\mu$ 的子集于 Y^X 都有级 $\geqslant\omega_\mu$ 的触点。于是下列定理成立：

定理 9. Y^X 内子集 F 为 ω_μ-列紧的充要条件是下述二命题同时成立：

i) 对于任意 $X'\subseteq X$，$\overline{\overline{X'}}\leqslant|\omega_\mu|$，及任意 $F'\subseteq F$，当 $\overline{\overline{F'}}\geqslant|\omega_\mu|$ 时，能于 F' 找到一个 ω_μ-列 $\{f_\xi\}$，使它限制在 X' 时成为基本列，其中 $\xi\neq\eta$ 时 $f_\xi\neq f_\eta$。

ii) F 于 X 是同等连续的，即对任意给定的 $\varepsilon\in B$（见定义 3），$\varepsilon>0$ 时存在着 $(\delta\in A)$ $\delta>0$ 使当 $f\in F$，$x,x'\in X$ 及 $\rho_X(x,x')<\delta$ 时有 $\rho_Y[f(x),f(x')]<\varepsilon$。

注. 条件 i) 中"任意的 X'"可换成"某个稠密于 X 的 X'"。X' 的存在性是由于 X 的 ω_μ-致密性得到保证的（见定

理 4 及文[8]定理之命题(C_μ))。

证。只须将古典 Arzela-Ascoli 定理的证明加以适当修改使其适用于目前的场合。

先证条件的充分性，F，F' 及 f_ξ 等符号的含义已见定理的题设条件。证明分做几步进行。

第一步先证明：对于任意 $\delta\in A, \delta>0$ 时恒存在 $X'\subseteq X$，其中 $\overline{\overline{X'}}<\omega_\mu$ 且对 $x\in X$ 恒有使 $\rho_X(x,x')<\delta$ 成立的点 $x'\in X'$。

实际上，考虑一切满足下列条件（$*$）的集 $A\subseteq X$ 所成之族 F_A：

（$*$）对于 $x,x'\in A$ 恒有 $\rho_X(x,x')\geqslant\delta$。

上述集族 F_A 是一"具有有限特征的族"（[11],P.32），故据 Tukey 引理知 F_A 必有极大元（[11],P.33），设 X' 为极大元中之任一个，我们来证明 X' 就是所需求者，为此只需证 $\overline{\overline{X'}}<\omega_\mu$ 就行了。用反证法，设其不然，于是 X' 满足条件（$*$）而且 $\overline{\overline{X'}}\geqslant\omega_\mu$，但这是与 X 的 ω_μ-致密性相矛盾的（定理4命题 iii)）。因此 X' 确实是所需求者，这就完成了第一步的证明。

第二步。要证明$\{f_\xi(x)\}$对 $x\in X$ 恒是收敛列。

实际上，由于 Y 的 ω_μ-致密性，$\{f_\xi(x)\}$中恒包含收敛子列$\{f_{\eta_\xi}(x)\}$。因此为了证明第二步只须证明$\{f_\xi(x)\}$对 $x\in X$ 恒是基本列就行了。这个证明须将古典方法略加修改，大意如下：首先取 ε,δ 如题设条件 ii) 所述，根据证明第一步，存有 $X'\subseteq X$，$\overline{\overline{X'}}<\omega_\mu$ 且对 $x\in X$ 恒有使 $\rho_X(x, x')<\delta$ 成立的 $x'\in X'$。其次，对于 $x'\in X'$ 又有序数 $\eta_{x'}<\omega_\mu$ 使当 $\xi,\xi'\geqslant\eta_{x'}$ 时 $\rho_Y[f_\xi(x'),f_{\xi'}(x')]<\varepsilon$。最后若命 $\eta=\sup\limits_{x'}\{\eta_{x'}\}$，则 $\eta<\omega_\mu$ 且

当 $\xi,\xi'\geqslant\eta$ 时：$\rho_Y[f_\xi(x), f_{\xi'}(x)]\leqslant\rho_Y[f_\xi(x), f_\xi(x')]+\rho_Y[f_\xi(x'), f_{\xi'}(x')]+\rho_Y[f_{\xi'}(x'), f_{\xi'}(x)]<3\varepsilon$. 其中 $x\in X$, $x'\in X'$, 且 $\rho_X(x,x')<\delta$. 由于 ε 的任意性，即完成了第二步的证明。

用完全同样的方法即知，$f_\xi\to f$: $\{f_\xi(x)\}$向 $f(x)$ 一致收敛且 $f\in Y^X$。

条件必要性的证明大意：

i) 是显然的。

ii) 用反证法，设 ii) 不成立，便存在 $\varepsilon\in B$ $(\varepsilon>0)$ ω_μ-列 $\{f_\xi\},\{x_\xi\}$, 及 $\{x'_\xi\}$ 使 $\rho_X(x_\xi,x'_\xi)<\delta_\xi$ 但却 $\rho_Y[f_\xi(x_\xi),f_\xi(x'_\xi)]\geqslant\varepsilon$ 及 $\delta_\xi\to0$ 成立。由此即可推出矛盾。

参 考 文 献

[1] Sikorski, Remarks on some topological spaces of high power, Fund. Math. T. 37 (1950) P.P.125—136.

[2] ларовиченко, И. ДАН. СССР, Т. 115 №5, (1957), p.p.866—868.

[3] Gillman, L. and Henriksen, M. Concerning rings of continuous functions. Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 77 (1954), p.p.340—362. 或 MR. Vol. 16, №2(1955), p.156.

[4] Cohen, L. W. and Goffman, C.A theory of transfinite convergence, ibid, Vol. 66 (1949) p.p.65—74. The theory of ordered abelian groups, ibid, Vol. 67 (1949), p.p310—319.

[5] Hausdorff, F. Grundzuge der mengenlehre, (1914), Leipizig.

[6] 王成堂：《ω_μ-可加的拓扑空间》（见本文集）.

[7] 关肇直：《拓扑空间概论》(1958)，科学出版社.

[8] 王戍堂：《一致性空间的一个定理》，科学记录，新辑2卷10期 (1958)，392—395.
[9] 辛钦,A. Я. (北京大学译)，《数学分析简明教程》，(1954)，高教出版社.
[10] Gillman, L.Jerison, M.Rings of continuous functions, (1960) Nostrand Co. N. Y.
[11] Kelly, J.L. General topology, (1955) New York.

REMARKS ON ω_μ-ADDITIVE SPACES(II) ——ELEMENTARY THEORY OF CONTINUOUS MAPPINGS

Wang Shu-tang

Abstract

This is a continuation of the work of [6]. In which we define the limit of a transfinite sequence of continuous functions, the Arzela-Ascoli theorem and the like are generalized to the present case.

关于ω_μ-可加拓扑空间的两个注记*

王 戍 堂

摘 要

本文接续作者[1]，[2]而作。

(1) 简化了L.W.Cohen与C. Goffman 1950年在此方面的工作，并指出它乃是文[1]一定理的直接推论。

(2) 研究一致空间一致结构的ω_μ-距离化问题，得到了必要充分条件，这种条件与Cohen Goffman的条件ii) 类似。

(3) 求得完全正则空间具有ω_μ-可加性的充要条件，它包含O. Nelson 1957年的结果（Portugialae Math.）为特例，并作了推广。

*本文完成于1963年，未发表。

本文是接续作者文［1］、［2］而作，今后将不加声明地地沿用［1］、［2］的名词及术语。

我们曾于文［1］证得下述定理：

定理 1. 拓扑空间 R 可以 ω_μ-距离化的充要条件是[1]，它是 ω_μ-可加的 $(U)_{|\omega\mu|}$ 空间。

拓扑空间是 $(U)_{|\omega\mu|}$ 型的意思是：于 R 可以引入一个具有势 $|\omega_\mu|$ 一致基的一致性结构使其一致拓扑与 R 原有的拓扑一致。这其实就是S.Mrowka 的 $|\omega_\mu|$-几乎距离空间[3,4]。

定理 1 是 Александров—Урысон 定理（[5]，p.186）的推广。基于定理 I 及 Mrowka 的结果[4]，我们曾得到[1]几个 ω_μ-距离化定理，其中包括 Sikorski[6] 的结果以及 Nagata-Смирнов[5]定理的推广。

此外，L.W.Cohen 与C.Goffman 于文[7]求得一致空间可以由一个 Abel 序群距离化的另外一组条件。但它们的结果过于复杂。本文第一个目的在于简化这个结果，并指出它乃是定理 1 的直接推论。其次我们也可以考虑一致空间一致结构的 ω_μ-距离化问题。

文［2］研究正则空间 R 具有 ω_μ-可加性的问题，所用的工具就是由 R 向另一正则空间 Y 的一切连续映象。本文的第二个目的就是将［2］中一个定理加以变形，从而包括了 O. Nelson 最近的结果[8]为特殊情况。最后，我们引入完全 (R, Y) 正则的概念，将所得定理作了进一步推广。

§ 1. L.W.Cohen 与 C.Goffman 的定理[7]是：

定理 2. 一致空间 R 可以由一 Abel 序群距离化（在拓扑

---

(1) ω_μ 恒表示规则的初始序数。

意义下)的充要条件是，存在邻域组$\{V_\xi(x)\}$，其中$x\in R$，$\xi<\xi^*$，具备下列性质：

i) $\prod_{\xi<\xi^*} V_\xi(x)=\{x\}$，

ii) 如果$\xi_1<\xi_2<\xi^*$，则有$V_{\xi_1}(x)\supseteq V_{\xi_2}(x)$，

iii) 如果$\eta<\xi^*$，则存在一个$\eta\leqslant\xi(\eta)<\xi^*$使得当$V_{\xi(\eta)}(x)\cdot V_{\xi(\eta)}(y)\neq 0$时有$V_{\xi(\eta)}(y)\subseteq V_\eta(x)$，

iv) 设$\eta^*<\xi^*$，则$\prod_{\eta<\eta^*} V_{\xi(\eta)}(x)$是开集。

上述性质 i)—iv) 中的ξ^*是具有如下性质（＊）的极限序数，而ξ，η，η^*等则都表示序数。

性质（＊）：若$\eta^*<\xi^*$而$\xi_\eta<\xi^*$则有[1]

$$\sup\{\xi_\eta:\ \eta<\eta^*\}<\xi^*.$$

不难看出，满足性质（＊）的极限数就是某规则初始数。

分析［7］的证明便知，所谓邻域组$\{V_\xi(x)\}$，指的是对每个$x\in R$它形成基本邻域组。

首先注意到，条件 ii) 一般要求过强，我们要用下列的 v) 来代替它：

v) 对于$x\in R$，$\{V_\xi(x)\}$($\eta<\xi^*$而$\xi(\eta)$是 iii) 中所指定的）形成x处的基本邻域组。

(1) 若于R存在邻域组$\{V_\xi(x)\}$，$x\in R$，$\xi<\xi^*$满足条件 i)、iv) 及 v) 则R必是ξ^*-可加的．为此，只需证明：每个开集η^*-列$\{G_\eta\}$，$\eta<\eta^*$而$\eta^*<\xi^*$，的交集$\prod_{\eta<\eta^*} G_\eta$仍是开集就行了。

设$x\in\prod_{\eta<\eta^*} G_\eta$，于是由 v)，对于每个$\eta<\eta^*$将有$\eta'<\xi^*$

(1) ξ_η表示由$\eta<\eta^*$向$\xi<\xi^*$的一单值函数。

使 $x\in V_{\xi(\eta')}\subseteq G_\eta$。由性质（*）设 $\eta^{**}=\sup\{\eta'\}$ 则 $\eta^{**}<\xi^*$

于是 $x\in\prod_{\eta<\eta^*}V_{\xi(\eta)}(x)\subseteq\prod_{\eta<\eta^*}G_\eta$。由性质 iv) 知，$x$ 是集 $\prod_{\xi<\eta^*}G_\eta$ 的内点．因此证明了 $\prod_{\eta<\eta^*}G_\eta$ 是开集．

(2) 若于 R 能引入基本邻域组 $\{V_\xi(x)\}$，$x\in R$ 而 $\xi<\xi^*$，使其满足条件 ii)，则 R 必是 $(U)_{\bar{\bar{\xi}}^*}$ 型空间。其中 $\bar{\bar{\xi}}^*$ 表示对应于序数 ξ^* 的基数。即型为 ξ^* 的良序集的势。

证明。今定义

$u_\eta=\{(x,y)$；其中 $x\in R$ 而 $y\in V_\eta(x)\}$

只需证明 $\{u_\eta\}$ 形成某一致结构 u 的子基，则其余一切都显然了。

为此，根据［5］，只需证明下列各条：

一．$\triangle\subseteq u_\eta$。显然。

二．$u^{-1}{}_{\xi(\eta)}\subseteq u_\eta$。

设 $(x,y)\in u^{-1}{}_{\xi(\eta)}$，于是 $(y,x)\in u_{\xi(\eta)}$，$x\in V_{\xi(\eta)}(y)$ 从而 $V_{\xi(\eta)}(x)\cdot V_{\xi(\eta)}(y)\neq 0$。根据 iii) $y\in V_{\xi(\eta)}\subseteq V_\eta(x)$，此即 $(x,y)\in u_\eta$。

三．$u_{\xi(\eta)}\circ u_{\xi(\eta)}\subseteq u_\eta$。

设 $(x,y)\in u_{\xi(\eta)}$，$(y,z)\in u_{\xi(\eta)}$．于是 $y\in V_{\xi(\eta)}(x)$，$z\in V_{\xi(\eta)}(y)$，从而 $V_{\xi(\eta)}(x)\cdot V_{\xi(\eta)}(y)\neq 0$．根据 iii)，$z\in V_{\xi(\eta)}$ 而 $y\subseteq V_\eta(x)$．此即 $(x,z)\in u_\eta$。

总结前边讨论，便得到下列定理：

定理3．ω_μ-可加拓扑空间 R，可以 ω_μ-距离化的充要条件是：对于 $x\in R$ 存在基本开邻域族 $\{V_\xi(x)\}$，$\xi<\omega_\mu$，具有下列性质：对于每个 $\eta<\omega_\mu$ 都存在 $\xi(\eta)$ 使 $\eta\leqslant\xi(\eta)<\omega_\mu$ 且若 $V_{\xi(\eta)}(x)\cdot V_{\xi(\eta)}(y)\neq 0$ 则 $V_{\xi(\eta)}(y)\subseteq V_\eta(x)$。

其中 ω_μ 表示规则初始数．

设 R 是ω_μ-距离空间，并命 $\rho(x,y)$ 表示二点 x，y 的ω_μ距离，于是

$$u_{\varepsilon_\eta}=\{(x,y):\rho(x,y)<\varepsilon_\eta\}$$

便是 R 的某一致性结构的势为 ω_μ 的基．其中距离函数 $\rho(x,y)$取值于特征 ω_μ 的序群[1]A；ε_η 是 A 中单调下降的非负元素，$\eta<\omega_\mu$；且对 $\varepsilon\in A$恒存在 $\eta<\omega_\mu$ 使 $\varepsilon_\eta<\varepsilon$ 对 $\eta\geqslant\eta_0$ 成立。

我们说一致空间 R，在一致结构意义下可以 ω_μ-距离化，其意思是：能于 R 引入一个上述距离函数 $\rho(x,y)$ 使其引导出的一致结构与 R 原有者一致。于是有

定理 4. 一致空间 R 在一致结构意义下可以 ω_μ-距离化的充要条件是：其一致结构 u 具有单调下降的势为 $|\omega_\mu|$ 的基。且其中 $|\omega_\mu|$ 不能再缩小（除去 R 具有离散一致拓扑的情况）．

证明．必要性很显然．又当 $\mu=0$，定理 2 便是 Chittenden, A.Weil 等人的结果[5]．在此结果的基础上．我们要对一般的 μ 证明定理 2．

今设$\{u_\xi\}$是定理假设中的一致基．首先由 u_1 出发可作 $u_2^{(1)}=u_{\eta_0}$ 使得 $u_2^{(1)}$对$u_1^{(1)}=u_1$ 来讲具备前述 (2)中性质二、三。如此继续下去，便可得到

$$u_1^{(1)},u_2^{(1)},\cdots,u_n^{(1)}\cdots.$$

于是$\{u_n^{(1)}\}$形成 R 的某一致结构的子基，由此子基且生成一个弱于 u 的一致结构，记作 $u^{(1)}$。由于假定了 ω_μ 已不可缩小，于是又可找到 $u_\eta\bar{\in}u^{(1)}$，记为 $u_1^{(2)}$。由 $u_1^{(2)}$出发又可得一序列：

$$u_1^{(2)},u_2^{(2)},\cdots,u_n^{(2)},\cdots$$

由它生成 R 的一致结构 $u^{(2)}$，它显然比 $u^{(1)}$要强。

今设由上述方法，对 $\eta<\alpha<\omega_\mu$ 都已作出了一致结构 $u^{(\eta)}$，

它们一个比一个强，都具有可数基底且都弱于u，由于$|\omega_\mu|$不能缩小，于是必存在$u_\xi \overline{\in} u^{(\eta)}$，其中$\eta<\alpha$。取其一为$u_1^{(\alpha)}$，再仿上方法，又可得一序列$u_1^{(\alpha)}, u_2^{(\alpha)}, \cdots u_n^{(\alpha)}, \cdots$，它生成的一致结构$u^{(\alpha)}$强于一切的$u^{(\eta)}$，但要弱于$u$。

于是，$u^{(\eta)}$ $(\eta<\omega_\mu)$都是具有可数的一致结构其和为u。对于$u^{(\eta)}$存在实值距离函数ρ_η并$u^{(\eta)}$以函数ρ_η距离化。

今定义：$\rho(x,y)=\{\rho_1(x,y),\cdots, \rho_\eta(x,y),\cdots\}$，$\eta<\omega_\mu$。以下证明：由$\rho$产生的一致结构与$u$一致．为此只需证明以下两点：

（一）对每个$u_\eta \in u$，存在$\varepsilon=\{a_1,a_2,\cdots,a_\xi,\cdots\}$使得

$\{(x,y):\rho(x,y)<\varepsilon\}\subseteq u_\eta$。

实际上，此时必存在η'使$u_\eta \in u^{(\eta')}$，因此有实数$a_{\eta'}$，使得$\{(x,y):\rho_{\eta'}(x,y)<a_{\eta'}\}\subseteq u_\eta$。

取 $a_\xi=\begin{cases} a_{\eta'} & \xi=\eta' \text{时} \\ 0 & \xi\neq\eta' \text{时} \end{cases}$，

于是$\varepsilon=\{a_1,\cdots,a_\xi,\cdots\}$ 便满足（一）的要求。

（二）对任意$\varepsilon=\{a_1,\cdots,a_\xi,\cdots\}\neq 0$，存在$u_\eta$使得

$u_\eta\subseteq\{(x,y):\rho(x,y)<\varepsilon\}$。

实际上，设$a_{\xi_0}\neq 0$并取$u_\eta \overline{\in} u^{(\xi_0)}$，则$\rho_\xi(x,y)\neq 0$，其中$(x,y)\in u_\eta$，$\xi\leqslant\xi_0$。因此$u_\eta$满足上述要求。

§ 2．设R，Y都是正则拓扑空间，于是文［2］证明了下列定理：

定理5． 下列二命题等价：

1）R是ω_μ-可加的拓扑空间；

2）R是0维的，而且由R向Y连续映象η^*-列（$\eta^*<\omega_\mu$，为任意的序数）$\{f_\eta\}$，$\eta<\eta^*$，的极限（按点，若其存在

的话）f 也是由 R 向 Y 的连续映象。特别可取 Y 为全体实数。现在要证明下列

定理 6′. 若 R 是完全正则空间，而且每个定义于 R 上的连续函数列 $\{f_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 的极限（按点，若其存在的话）f 也是 R 上的连续函数，则 R 必是 0 维的。

证明。设 $x_0 \in R$，$V_1(x_0)$ 是 x_0 的任意开邻域，我们要证明必存在满足条件 $x_0 \in V(x_0) \subseteq V(x_1)$ 的开闭集 $V(x_0)$。

由于 R 是完全正则空间，于是有连续函数 $\overline{f_1}$：$\overline{f_1}(x_0)=1$；$0 \leqslant \overline{f_1}(x) \leqslant 1$；当 $x \overline{\in} V_1(x_0)$ 时 $\overline{f_1}(x)=0$。设 $V_1'(x_0)=E\left[x; \overline{f_1}(x) > \frac{2}{3}\right]$，并取 $V_2(x_0)$ 使 $x_0 \in V_2(x_0) \subseteq \overline{V_2(x_0)} \subseteq V_1'(x_0)$。于是又可作连续函数 $\overline{f_2}$：$\overline{f_2}(x_0)=1$；$0 \leqslant \overline{f_2}(x) \leqslant 1$；当 $x \overline{\in} V_2(x_0)$ 时 $\overline{f_2}(x)=0$。如此进行，便可得一连续函数列 $\overline{f_1}$，$\overline{f_2}$，$\cdots$，$\overline{f_n}$，$\cdots$ 使得：$\overline{f_n}(x_0)=1$；$0 \leqslant \overline{f_n}(x) \leqslant 1$；而且 $\overline{E[x; \overline{f_{n+1}}(x) > 0]} \subseteq E\left[x; \overline{f_n}(x) > \frac{2}{3}\right]$。今取 $f_n = \inf\{\overline{f_1}, \overline{f_2}, \cdots, \overline{f_{n-1}}\}$，于是 f_n 仍是连续函数，而且 $f_n \geqslant f_{n+1}$。从而 $\{f_n\}$ 的极限存在，设其为 f。根据假定 f 仍是连续函数，而且显然 $x_0 \in E\left[x; f(x) > \frac{1}{2}\right] \subseteq V_1(x_0)$。我们证明 $E\left[x; f(x) > \frac{1}{2}\right]$ 便是所要求的开闭集。它是开集已属显然，它是闭集是由于

$$\overline{E\left[x; f(x) > \frac{1}{2}\right]} \subseteq \overline{E[x; f_{n+1}(x) > 0]} \subseteq E\left[x; f_n(x) > \frac{2}{3}\right].$$

故 $f(x) \geqslant \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$ 在 $x \in \overline{E\left[x; f(x) > \frac{1}{2}\right]}$ 上成立。于是

$$\overline{E\left[x; f(x) > \frac{1}{2}\right]} = E\left[x; f(x) > \frac{1}{2}\right].$$

由定理 5 及定理 6′ 显然有

定理 6. 设 R 是完全正则空间，则下列二命题等价：

1）R 是 ω_μ-可加的；

2）定义于 R 上的连续函数 η^*-列 $\{f_\eta\}$，$\eta<\eta^*<\omega_\mu$ 的极限函数 f 也连续。

当 $\mu=1$，我们得到（[9]，定理 5.2）：R 成为 P 空间的充要条件是：R 是完全正则的，而且连续函数列$\{f_n\}$的极限函数（按点，若存在）f 仍连续。这就是 Nelson 的定理[8]。

注：作者并未看到[8]的原文，只是看到 G.Nobeling 在德国数学评论杂志上关于[8]文结果的介绍[10]。

现在设 R 是任意拓扑空间，Y 是正则空间．如果存在二点 y_1，$y_2\in Y$，$y_1\neq y_2$ 而且对于 $x_0\in R$ 及闭集 $F\subseteq R$ 当 $x_0\overline{\in} F$ 时恒能定义由 R 向 Y 内的连续映象 f 使得 $f(x_0)=y_1$，$f(x)=y_2$ 其中 $x\in F$，我们便说 R 是完全 (R,Y) 正则空间。不难证明：完全 (R,Y) 正则空间 R 必是正则空间。

利用同样方法可得到下列

定理 7. 设 R 是完全 (R, Y) 正则空间，Y 是 ω_μ-备的全序集(3) 且赋于序拓扑，则下列二命题等价：

1）R 是ω_μ-可加的；

2）由 R 向 Y 内任意连续映象 η^*-列 $\{f_\eta\}$，$\eta<\eta^*<\omega_\mu$ 的极限（若其存在）映象也连续。

定理 7 是否对一般正则空间都成立的问题尚未解决。

参 考 文 献

[1] 王成堂：《ω_μ—可加的拓扑空间（I）》，见本文集.

[2] 王成堂：《ω_μ—可加的拓扑空间(II)—连续映象初论》，见本文集.

---

(3) 即$\sup\limits_{\xi<\omega_\mu}\{y_\xi\}$，$\inf\limits_{\xi<\omega_\mu}\{y_\xi\}$ 均存在。

[3] S. Mrowka, On almost-metric spaces, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III Vol. V., No 2 (1957), p. p. 123-127.

[4] S. Mrowka, Remark on locally finite systems. Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III Vol. V. No 2 (1957) p. p. 129-132.

[5] J. L. Kelly, General topology, New York, 1955.

[6] R. Sikorski, On some topological spaces of high power, Fund. Math., T. 37 (1950), p. p. 125-136.

[7] L. W. Cohen and C. Goffman, On the metrization of uniform spaces, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 1, No 6 (1950), p. p. 750-753.

[8] O. Nelson, On two properties of P spaces, Portugialae Math. Vol. 16 (1957), p. p. 37-39.

[9] L. Gillman and M. Henriksen, Concerning rings of continuous functions, Tran. Amer. Math. Soc. Vol 77 (1954), p. p. 340-362.

[10] G. Nobeling, Zentrablatt fur Math. und ihre Grenzgebeite, Bd. 83. (1960), p. 175.

SOME REMARKS ON ω_μ-ADDITIVE SPACES*

Wang Shu-tang

Abstract

This paper contains the following results:

(1) The work of L. W. Cohen and C. Goffman in

*written in 1963, unpublished

the year of 1950 is simplified and derived as a consequence of [1] .

(2) A necessary and sufficient condition for a uniform space to be ω_μ-metrizable (i. e. its uniformity can be derived from an ω_μ-metric) is obtained (added in 1983 : a similar condition was obtained independently by Stevenson and Thron six years later, cf. Fund. Math. 65 (1969) 317-324.) .

(3) Get the necessary and sufficient condition for a completely regular space is of ω_μ-additive, which contains the result as a special case of O. Nelson's gotten n 1957, and some more generalization.

ω_μ-可加拓扑空间理论的进展

王 戌 堂

一、基本定义

§1．本文中恒以 ω_μ 表示规则初始序数，而又以 ω_μ 表示它的基数．根据波兰学者 R.Sikorski[1]所谓一个拓扑空间 (X,u) 是 ω_μ-可加的，是指其拓扑结构满足比通常“有限个开集之交是开集”这一条件更强条件的拓扑空间．在 ω_μ-可加拓扑空间中，上述条件应加强为“势 $<\omega_\mu$ 的任意开集族，族中一切开集之交仍是开集。”

如所周知，对于一般的拓扑空间，距离化问题是其中心问题之一．然而，当 $\mu>0$ 时，我们有下列结果[2]：

命题 1． 对于 $\mu>0$，ω_μ-可加拓扑空间除非是全散的，它的拓扑结构不能由某一距离引出，即它是不能距离化的．

[1]中证明：

命题 2． 正则 ω_μ-可加拓扑空间一定是 0 维的．

为了推广普通的距离化方法，R.Sikorski[1]第一个引进了 ω_μ-距离的概念．

定义 1． 设 A 是一有序集合，且对任意 A 的二元 a 与 b，定义了加法运算，使 A 成为一个 Abel 群，下列条件满足：

$a+b\leqslant b+c$ 的充要条件是 $a\leqslant c$．

此时称 A 是一个 Abel 序群，简称之为序群。若 $a>0$，即称 a 正元；而 $|a|$ 则表示 a 与 $-a$ 中之较大者。

定义 2. 设 A 为一序群，说 A 具有特征 ω_μ 是指存在一个递减正元 ω_μ-列 $\{\varepsilon_\xi\}$，$\xi<\omega_\mu$，满足下列条件：

(*) 对于 A 的每个正元 ε，存在序数 $\xi_0<\omega_\mu$，使当 $\xi>\xi_0$ 时，$\varepsilon_\xi<\varepsilon$ ($\xi<\omega_\mu$) 成立。

ω_μ-距离空间的概念详细写出为：

定义 3. 设 X 是任一集合，A 是具特征为 ω_μ 的序群。设对 X 的任意二元 p、q，均对应于 A 中一元 $\rho(p,q)\in A$，具备下列条件：

a) $\rho(p,p)=0$；$\rho(p,q)>0$，$p\neq q$；

b) $\rho(p,q)\leqslant\rho(p,r)+\rho(q,r)$；

此时称 $\rho(p,q)$ 这一函数为 X 的 ω_μ-距离，X 即称作是 ω_μ-距离空间。

由上述定义看到：ω_μ-距离和普通距离的根本区别即在于以 A 代替了实数，普通距离空间即是 ω_0-距离空间。

由于 ω_μ-距离空间满足第一可数公理的充要条件是 $\mu=0$，因此，ω_μ-距离空间对于高基数情况的研究是非常有用的。

推广距离空间的类似想法与一些研究，早在拓扑空间理论初创时期，就已为 F.Hausdorff 开始了。ω_μ-距离空间的正式命名是 Sikorski[1]作出的。

本文将综合上述类型拓扑空间的一些进展情况，所牵扯到一系列其它方面的概念及定义将于下文有关部分陆续引入。

二、有关的一些研究方面，ωμ-空间的背景

§2. 本世纪五十年代前后，Sikorski 关于 Boole 代数作

出了广泛深入的研究工作，主要是将 Boole 代数运算中的和交运算拓展至无限场合，他在 1960 年应 Halmos 建议的要求在德国“Ergebnisse”从书总结出版了专著“Boole 代数”。其中第一章主要介绍一般 Boole 代数理论，本书中心是第二章，标题就是“无限和与交”。运用 ω_μ-可加拓扑空间的概念，Sikorski 将Boole 代数中著名的M. H. Stone 表现定理[3]推广至无限运算的情况。

Boole 代数 K称作是 ω_μ-完备的是指对 K的任意子集 $C \in K$, $\bar{\bar{C}} < |\omega_\mu|$, C中一切元素的和存在。Sikorski 证明了下列（参见[1]）：

定理 1. 设K 是 ω_μ-完备的 Boole 代数，则下列二命题等价：

(a) K同构于-ω_μ-紧、ω_μ-可加拓扑空间中由所有开集组成之集的域。

(b) K的任意 ω_μ-可加真理想均含于 K的一个 ω_μ-可加素理想之中。

上述定理中，ω_μ-紧的意思是：X 中任意 ω_μ-列 $\{p_\xi\}$ 均含有收敛于 X 某点 p 的 ω_μ-子列 $\{p_{\eta_\xi}\}$. 又理想 I 是 ω_μ-可加的即指：对任意 d 序列 $\{A_\xi\}$, $\xi<d$, 有$\sum\limits_{\xi<d} A_\xi \in I$ $(d<\omega_\mu)$ 。

上述定理 1 即是著名 Stone 定理的推广。

§3. 古典收敛理论的推广

建立在普通实数基础上的古典收敛理论，直接与可数性相紧密联系；例如所谓的数列即如此，这一事实的早期抽象化乃是 Hausdorff 的两个可数性公理的提出. 解除这一基数的限制，推广分析的方法，拓扑学方面即提出一致空间的概念及研

究[4,5]；而在代数方面则是非阿几米得域的研究[6,7,8]。

为了推进上面的研究，L.W.Cohen与C.Goffman于1949年（[9]）对集合S引入邻域族$\{U_\xi(x)\}$，$\xi<\omega_\mu$，它满足下列的C.G条件：

1． $\bigcap\limits_{\xi<\omega_\eta} U_\xi(x)=\{x\}$，单点集合$\{x\}$。

2． 若$\xi_1<\xi_2$，则$U_{\xi_1}(x)\supseteq U_{\xi_2}(x)$。

3． 对$\eta<\omega_\mu$，存在$\xi(\eta)$，使$\eta\leqslant\xi(\eta)<\omega_\mu$，且当$U_{\xi(\eta)}(y)\cap U_{\xi(\eta)}(x)\neq\phi$时，必有$U_{\xi(\eta)}(y)\subseteq U_\eta(x)$。

4． 设$d<\omega_\mu$，并设$\{x_\eta\}_{\eta<\omega_\mu}$为一列点，$U_{\xi_\eta}(x_\eta)$满足下列条件：$\eta_1<\eta_2<d$时，$U_{\xi_{\eta_1}}(x_{\eta_1})\supseteq U_{\xi_2}(x_{\eta 2})$，则$\bigcap\limits_{\eta<a} U_{\xi_\eta}(x_\eta)$是非空集合。

定义了这种邻域的空间与ω_μ-距离空间的关系见后文有关章节。从这些邻域系出发，文[9]研究了收敛，完备等问题，推广了古典分析的一些基本定理。这些概念（收敛，基本列等等）及定理（收敛列一定是基本列等等……）此处不一一列举。文[9]特别证明了定理：若S是ω_μ-完备的则必是ω_μ-第二纲的。其中，ω_μ-完备的意义是：凡基本ω_μ-列均是收敛列。又称S作ω_μ-第二纲的，其意义为：设$\{N_\xi\}$，$\xi<\omega_\mu$，是S中无处稠密的任意集ω_μ-列，则$T=\bigcup\limits_{\xi<\omega_\mu} N_\xi$必是s的真子集。

§4. 拓扑空间X上定义的一切连续实值函数之族记为$C(X)$，一切连续、实值、有界函数则记为$C^*(X)$。这里主要讨论$C(X)$。

众所周知，$C(X)$具备序结构及代数结构[10]。作为代数结构，基本法则定义如下：设$f,g\in C(X)$，则$f+g$和$f\cdot g$的意义是：

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \text{和} (f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$$

又定义 $(-f)$ 为：

$$(-f)(x)=-f(x).$$

于是在上述意义之下 $C(X)$ 成为可换环，又若 $\frac{1}{f(x)}$ 存在的话，就记作 $(f^{-1})(x)=\frac{1}{f(x)}$.

除了上述代数结构外，还可以下法于 $C(X)$ 定义半序结构：

$f\geqslant g$，当且仅当 $x\in X$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$.

对序结构显然成立：$f\geqslant g$ 当且仅当对 $h\in C(X)$ 恒有 $f+h\geqslant g+h$，即序具“平移不变性”。于空间恒取 0 值的函数仍记作0。于是当 $f\geqslant 0$ 及 $g\geqslant 0$ 时必有 $f\cdot g\geqslant 0$。因此 $C(X)$ 便形成一个半序环。（在上述条件下，显见地有 $f+g\geqslant 0$）。

容易看出，$C(X)$ 此时在序结构的上述意义下，还是一个格。

真理想，素理想，极大理想等等习知的一般代数概念，这里不再列出。

L. Gillman与 M. Henriksen 在连续函数环的研究工作中提出：对怎样的拓扑空间 X，$C(X)$ 中的素理想必是极大理想？（[11, 12]）。研究结果均总结于[10]的有关章末习题之中。

为了得到 $C(X)$ 的一些更有意义的结果，必须对 X 的拓扑结构本身加以较强要求，此时便假设 X 是完全正则空间。

如所周知（[10, 13]），任意完全正则空间 X 均可作为一稠密子集而嵌入于一紧空间 βX (Stone-Cech 紧化)，使

得任意$f\in C^*(X)$均可扩充为βX上的（有界）连续函数f^β. f的零点集合记作$Z(f)$：$Z(f)=\{x\in X: f(x)=0\}$. 下述盖尔芳得-柯尔莫哥洛夫定理确定了$C(X)$中的一切极大理想.

定理 2. (Gelfand-Kolmogoroff) 设p是βX的任意点. 则

$$M^p=\{f\in C(X):\ p\in \overline{Z(f)}\}$$

是$C(X)$中的一个极大理想. 反之，设M是$C(X)$中之任一极大理想，则必存在$p\in\beta X$，使$M=M^p$.

于定理 2 中，若$p\in X$则极大理想M^p便是定点 (fixed) 的，此时M^p记作M_p；当$p\in\beta X-X$时，M^p便是自由 (free) 的.

定义 4. 对任意$p\in\beta X$以N^p表示$C(X)$中由满足条件：$\overline{Z(f)}$包含X的一个邻域之所有函数f组成的理想. 当$p\in X$时，N^p特记之N_p.

可以证明下列[11]：

定理 3. (1) $C(X)$中每个素理想均包含于唯一的一个极大理想之中.

(2) 设p是含于M^p中的素理想，则必有$p\supseteq N^p$.

(3) M^p是包含N^p的唯一素理想的充要条件是$M^p=N^p$.

在上述定理的基础上，Gillman 与 Henriksen[11]引入下列P点概念.

定义 5 点$p\in X$称为P点是指$M^p=N^p$，即p处的唯一素理想即极大理想M^p. 又若X的每点均是P点时，即称X为P空间.

容易证明P空间即是ω_1-可加拓扑空间.

三、关于ω_μ-可加拓扑空间的一些结果

§5. Sikorski[1]证明了下列一些结果。

定理3. 设F_1，F_2是正规ω_μ-可加拓扑空间的二不相交闭集，则必有不相交开闭集G_1，G_2：$G_1\supseteq F_1$，$G_2\supseteq F_2$。又具有基底（即势$\leqslant\omega_\mu$的基底）的正规ω_μ-可加拓扑空间一定是完正规的。（其中$\mu>0$）

设p_μ表示所有序数$\xi<\omega_\mu$之集，W_μ是包含p_μ的最小代数域（[14, 1]）。又设D_μ表示一切由0与1组成的ω_μ-列，对于p，$q\in D_\mu$，定义ω_μ-距离如下：

设$p=q$，则定义$\rho(p,q)=0$，设$p\neq q$，则定义$\rho(p,q)=\frac{1}{\eta_0}\in\omega_\mu$，其中$p=\{a_\eta\}$，$q=\{b_\eta\}$，$\eta_0$是满足$a_{\eta_0}\neq b_{\eta_0}$之最小序数。

于是D_μ为ω_μ-距离空间。[1]证明了这种空间对正则具有基底的（具有势$\leqslant\omega_\mu$的基底）ω_μ-可加拓扑空间是万有的：

定理4. 每一具有基底的正则ω_μ-可加拓扑空间必同胚于D_μ的一子集。

关于D_μ[1]证明了下列

定理5. D_μ是（ω_μ-）完备的，且是具有Baire性质：设$\{X_\xi\}$是D_μ的无处稠密ω_μ-集列，则对于任意$d<\omega_\mu$，集$\sum_{\alpha>\xi}X_\xi$是无处稠密的．集$D_\mu-\sum_{\xi<\omega_\mu}X_\xi$是稠密的。

I. Juhasz（[15]）第一个证明：ω_μ-距离空间必是仿紧的。这一结果后来也为其他学者所独立得到（例如[16]等等）。

说ω_μ-距离空间是全有界的，是指对于A的任意正元ε，

空间 X 存在分解：$X=\bigcup\limits_{\xi<\alpha}X_\xi$，$\alpha<\omega_\mu$，而且 X_ξ的直径$<\varepsilon$。于是有

定理 6. [1]。任意 ω_μ-紧的 ω_μ-距离空间必是（ω_μ-）完备及全有界的。

今以 D_μ^0表示 D_μ中所有满足下列条件的 0，1 的 ω_μ-列：设 $p=\{\alpha_\eta\}$，$p\in D_\mu^0$，则除去有限个 η 之外，所有 $\alpha_\eta=0$。[1]中证明了

定理 7. D_μ^0是（ω_μ-）紧的自密的 ω_μ-距离空间。D_μ^0是可列个无处稠密子集之和。

今设 $\mu=\nu+1$，ω_ν 是正则的，而且 $\alpha<\nu$ 时，$2^{\omega_\alpha}=\omega_{\alpha+1}$。Sikorski 构造了完备的全有界的但非 ω_μ-紧的 ω_μ-距离空间的例子。因此虽当 $\mu=0$ 时定理 6 的逆成立，然 $\mu>0$ 时，对可达（accessible）正则数，定理 5 之逆一般并不成立。

1964 年，Monk 与 Scott[17]证明的结果是：设 ω_μ是第一个不可数且不可达的数，则 2^{ω_μ}在ω_μ-乘积拓扑 C_μ中是非ω_μ-紧的，此时 2^{ω_μ}即是本质上同于上文的 D_μ。

1969 年美国学者 F.W.Stevenson 与 W.J.Thron[18]则针对定理 6 又补充证明了

定理 8. 对非可达数（inaccessible）定理 6 的逆也未必成立。

§6. 以下讨论带有序结构的 ω_μ-可加拓扑空间

1949 年美国著名学者 L.W.Cohen 与 C.Goffman 研究了带有序结构的 Abel 群。即 Abel 序群（[19]）。

[19] 详细讨论了 Abel 序群的完备性及完备化问题。文中研究的序群满足条件：群的零元 θ 不是孤立点：若 $x>\theta$ 则必存在 y，$\theta<y<x$。

设序群 G 具有 ω_μ 特征[1]，此处 ω_μ 可假定是最小序数，文[19]研究了三种完备性：

t-完备：即拓扑完备，指任意基本 ω_μ-列是收敛列。

a-完备：即阿几米德完备，是指不存在阿几米德真扩张。

o-完备：即序完备，是指任意有上界的集合必有上确界。

设$\{a_\xi\}$，$\xi<\omega_\mu$，是正元 ω_μ-列，且对 $\varepsilon>0$，存在 $\eta<\omega_\mu$，使当 $\xi>\eta$ 时，$a_\xi<\xi$。引入下列邻域系：

$U=\{U_\xi(x)\}$，其中 $U_\xi(x)=\{y\in G: |x-y|<a_\xi\}$，$U_\xi=U_\xi(\theta)=\{y\in G: |y|<a_\xi\}$。

于是 $U_\xi(x)=x+U_\xi$。不难验证邻域系满足§3中CG条件。[19]证明了下列：

定理 9. G 是邻域系 U 的拓扑群。

为了说明 t-完备化的存在[19]引用下列

定义 6. G 的真子集 X 称作是下线段，是指 $x\in X$ 及 $y<x$ 时，则 $y\in X$。下线段称作是 Dedekind 的，是指任意 $y>\theta$ 存在 $x\in X$，$x+y\in X$。

这一定义是由Baer[20]引入的。Dedekind型下线段总体即作成一群 G_D。于是有

定理 10[19]. G 的 Dedekind 下线段族 G_D 是 G 的 t-完备扩张。而且 G_D 仍是特征 ω_μ的。

关于阿几米得完备性，即 a-完备性，[19]证得的结果是

定理 11. 若 G是 a-完备的，则 G 必也是 t-完备的。反之，若 G 是 t-完备的而且 G 稠密于其每一阿几米得扩张，则必是 a-完备的。

关于序完备，即 o-完备的结果是

定理 12. 若 $\mu>0$，则 G 是非阿几米得的。此时由 G 的所

有下线段组成的 o-完备扩张不形成群。

定理 12 后一结论的原因在于非 Dedekind 的下线段没有逆存在。

今设 A 是一序集，H 是定义于 A 上满足下条件的一切实函数 x：$L(x)=\{a\in A: x(a)=0\}$是 A 的良序子集，H 中的序定义如下：$x>0$ 是指 $L(x)$ 的首元素 a_0 有 $x(a_0)>0$。于是 H 形成 Abel 序群。称作 Hahn 群。这种群首先是 H.Hahn 于文[6]引入。

对于 Hahn 群[19]证得：

定理 13. Hahn 群是 t-完备的。

定理 14. Hahn 群的下线段有上确界的充要条件是该下线段是 Dedekind 型的。

定理 15. 设 G 是特征 ω_μ 的 Hahn 群，则 G 必是 ω_μ-第二纲的。

这些定理的证明，须要于 H 引进满足 CG 条件的邻域系。此不详述。

结合连续函数环的工作，Gillman 与 Henriksen 研究了线性 P空间（[11, 12]），其中也引用了 Dedekind 分割。此地也不详述了。

上述定理 5 中关于 D_μ的完备性最早见于 W.Sierpinski 的论文[22]。

§7. ω_μ-距离空间中超限列及有关拓扑性质

关于 ω_μ-距离空间中超限列的研究，除去 Cohen 与 Goffman 于 1949 年的工作[9]以外，尚有 1971 年美国 D.Harris的工作[23]。

首先引进下列一些概念。它们是 ω_μ-序列开，ω_μ-序列闭，

ω_μ-Frechet 与 ω_μ-链基。这些概念分别是普通概念：序列开、闭，Frechet，链基等的推广。

ω_μ-序列开集：X 的子集 A 称作为 ω_μ-序列开集，乃指任意收敛于 A 中某点的 ω_μ-点集必是最终（eventually）属于 A。又空间 X 本身称作是“ω_μ-序列的”是指 X 的任意 ω_μ-序列开子集均是开集。

ω_μ-序列闭集：X 中子集 A 称作是 ω_μ-序列闭集，是说没有一个经常（frequently）属于 A 的 ω_μ-点列而收敛于非 A 的点。

集合 A 的 ω_μ-闭包是：$\omega_\mu\text{-}clA=\{x$：存在某个经常属于 A 而收敛于 x 的 ω_μ-点列$\}$。

若 A 是 ω_μ-序列闭，则显然 $\omega_\mu\text{-}clA=A$。然而当 A 非 ω_μ-序列闭时，$\omega_\mu\text{-}clA$ 也未必是 ω_μ-序列闭的。实际上，算子 $\omega_\mu\text{-}cl$ 满足拓扑空间闭包公理中之三个，但不满足 $\omega_\mu\text{-}cl(\omega_\mu\text{-}clA)=\omega_\mu\text{-}clA$。当最后式子成立时，$\omega_\mu\text{-}cl$ 即可作为拓扑空间的闭包算子。我们说 X 是 ω_μ-Frechet 的。显然，若 X 是 ω_μ-Frechet 的，则 X 必也是 ω_μ-序列的。

ω_μ-链基：点 $x\in X$ 的 ω_μ-链基是指 x 处的递减 ω_μ-开集且这个列又形成 x 处的局部基底。

在上述这些定义作出后，文[23]建立了下列一些结果。

定理 16. 对于空间 X，下列诸条件等价：

(1) X 是 ω_μ-序列的。

(2) X 是某 ω_μ-序列空间的商。

(3) X 是某一 ω_μ-Frechet 空间的商。

(4) X 是某一 ω_μ-距离空间的商。

(5) X 是某一 0 维、局部 ω_μ-紧、完备的 ω_μ-距离空间的

商。

还有另外的一些等价条件，从略。这是 Franklin 文[24]定理的推广。

为了叙述 Harris 关于 ω_μ-Frechet 空间的结果，则还须引入"遗传商"概念。映象 f：$Y\to X$ 称作是遗传商映象，是：f 是连续的，且对任意 $A\subset X$ 诱导映象 f_A：$f^{-1}(A)\to A$ 是商。已知这一条件与下列条件等价：对任意 $x\in X$ 及 $f^{-1}(x)$ 的任意邻域 U 有 $x\in \mathrm{int}f[U]$。另外一个等价条件是：对任意 $A\subseteq X$ 与任意 $x\in A$，存在 $y\in Y$，$y\in f^{-1}(A)$ 且 $f(y)=x$。

Harris 推广了 Архангельскuй 的结果[25]指出：

定理 17. 对于空间 X 下列诸条件等价：

(1) X 是 ω_μ-Frechet 的。

(2) X 是某一 ω_μ-Frechet 空间的遗传商的象。

(3) X 是某一 ω_μ-距离空间的遗传商象。

(4) X 是某一 0 维、局部 ω_μ-紧、完备的 ω_μ-距离空间的遗传商的象。

另有其它一些等价条件，此处从略。

Harris 关于 ω_μ-可链空间证得

定理 18. 空间 X 是 ω_μ-可链的其充要条件是，X 是某一 ω_μ-伪距离空间的开象；又若 X 是 T_0 型时它是某一 ω_μ-距离空间的开象。

上述定理是 Пономарев 定理[26]的推广。

§8. 乘积空间的正规性问题

一个距离空间 X 与另一正规空间 Y 的乘积空间 $X\times Y$ 未必仍然是正规的。熟知这方面的第一个例子是由 E. Michael[27]作出的。以后这方面的研究工作不少。结合 ω_μ-距离空间的研

究，P.Nyikos 于[28]及[29]中询问道：距离空间与 ω_μ- 距离空间的乘积是否为正规空间。$\mu=0$ 时答案显然。关心的是 $\mu>0$ 时如何？1975 年J.E.Vaughan[30]得到了一些结果，从反面回答了这一问题。

今以 ω，ω_1 表示第一个无限与第一个非可数的序数，它们同时分别表示 $<\omega$ 与 $<\omega_1$ 的一切序数的集合。记 $D_1=\omega_1$ 且赋以全散拓扑。从而乘积拓扑空间 D_1^ω 是可距离化的。设 D_1^* 表示一切序数 $\leqslant\omega_1$ 之集：$D_1^*=D_1+\{\omega_1\}$。赋以满足条件：$\alpha<\omega_1$ 时，α 是孤立点的最小拓扑。设 B_1 表示积集 $(D_1^*)^\omega$ 上赋以箱拓扑(box topology)的拓扑空间，J.E.Vaughan[30] 证明了下列一些定理。

定理 19. $D_1^\omega\times B_1$ 是非正规的。

易知 D_1^* 是可以 ω_1-距离化的，而 Nyikos 证明过([29])：可数个 ω_μ- 可距离化空间赋以箱拓扑的乘积仍是 ω_μ- 可距离化的。于是定理 19 从反面回答了 Nyikos 的问题。定理 19 也说明了一个 ω_1- stratifiable 空间与另一stratifiable 空间的乘积可以不是正规的。这就否定了 Vaughan 的一个猜想 ([30] conjecture 1)。

关于任意自然数 n 的幂空间 B_1^n 及 B_1^ω 空间 [30] 的结果是：

定理 20. B_1^n 与 B_1 同胚。B_1^ω 非正规。

将上述 B_1 推广为 $B_\mu=(D_\mu)^\omega$。其中 D_μ 是将 D_1 中的 ω_1 换为 ω_μ 得到。同样定义 D_μ^*。

[30]关于 B_μ 证得

定理 21. $B_\mu\times B_\mu$ 非正规。

定理 21 回答了 K.Morita 的一个问题(见 [30]定理 4 后的

说明）。

四、拓扑空间的ω_μ-距离化问题

§9. 熟知拓扑空间的距离化问题是拓扑空间理论的中心问题之一，而本文命题1指出，$\mu>0$ 时 ω_μ- 可加拓扑空间一般是不能用实数作为两点距离以距离化的，然而可以考虑这空间的 ω_μ- 距离化。

ω_μ-可加拓扑空间的 ω_μ- 距离化问题，近十余年来已被进行了很广泛的研究。总结于下。

1950年时波兰学者 R. Sikorski 曾于[1]推广古典性的 Урысон 定理如下：

定理22. 设 X 是正则的 ω_μ- 可加拓扑空间，且具有势 $\leqslant \omega_\mu$ 的拓扑基，则 X 必是 ω_μ- 可距离化的。

上述定理仅给出了一个充分性条件、另一方面 S. Mrowka 曾引入并研究过 m- 几乎距离空间（[31, 32]）。它的定义如下：

设 X 是一集合，$P=\{\rho_\xi\}$ 为一族定义于积 $X\times X$ 上的非负实值函数，ξ 为序数 $\xi<\omega(m)$，且满足下列条件：

(1) 对 $x\in X$，$\rho_\xi\in P$，恒有 $\rho_\xi(x,x)=0$；

(2) $\rho_\xi(x,y)=\rho_\xi(y,x)$；

(3) $\rho_\xi(x,z)\leqslant\rho_\xi(x,y)+\rho_\xi(y,z)$；

(4) 对 $\rho_\xi\in P$，若恒有 $\rho_\xi(x,y)=0$，则 $x=y$；

(5) 设 $\rho_{\xi 1}$，$\rho_{\xi 2}\in P$，则 $max\{\rho_{\xi 1}, \rho_{\xi 2}\}\in P$。

集 $A\subset X$ 的闭包定义为 $\overline{A}=\bigcap_{\xi<\omega(m)}\{x:\rho_\xi(x,A)=0\}$时，$X$ 成为拓扑空间，称为 m- 几乎距离空间。m-几乎距离空间与具有势 m 一致基的一致空间相等同。文[2]研究了 m- 几乎距

离空间具 ω_μ- 可加性的充要条件，得到了结果（从略）. [2]中还证明了下述定理：

定理 23. 拓扑空间 X 可ω_μ-距离化的充要条件是它是可ω_μ-几乎距离化的 ω_μ- 可加空间。

和[1]不同，这里的 ω_μ- 距离乃是一切 ω_μ- 实数序列. 我们于这种列定义加法和序关系，使之成为特征 ω_μ 的序群. 这种序列 F. Hausdorff 也考虑过（[33]），并对它们定义过乘法（见文末）.

1964 年，我们给出了拓扑空间可 ω_μ- 距离化的第一个充分必要条件，它是（[2]）：

定理 24. 为了正则拓扑空间是 ω_μ- 可距离化的，充要条件是 X 具有ω_μ- 基底。

ω_μ- 基底是指 X 的一个拓扑基，该基能表为势 ω_μ 的局部有限开集族之并。

定理 24 推广了著名的 Nagata-Смирнов 定理，且将 Sikorski 的结果（定理 22）作为特例包含起来. 若将条件中"有限"二字改作"离散"，即得著名 Bing 的定理.

[2]中还证明了

定理 25. 如果 X 是 Hausdorff ω_μ- 紧的，则定理 22 的逆也成立。

此即 Урысон 第二距离化定理的推广.

I. Juhasz 扩充了作者文[2]的工作，给出了另一些距离化定理的推广（[15]）. 其中有的（例如关于 Архангелъскuй 定理的推广等）也在早些时间而为西北大学学生朱升武得到了. 作者至今未能找到[15]的原文.

1975 年日本的 Y. Yasui（[34]）以我们定理 24 的结果作

为出发点，重新给出 ω_μ- 距离空间的定义。并指出在这个意义下 ω_μ- 距离空间类是作者于文[2]引入的。

定义 7. 拓扑空间 X 称作是可 ω_μ- 距离化的是指存在一组 ω_μ- 基底且 X 是 ω_μ- 可加的。

[34]指出将定义 7 中的"ω_μ- 可加"这一条件除去即是 Nedev 与 Coban 文[35]中引入的 $|\omega_\mu|$ -距离空间。关于 $|\omega_\mu|$ -距离空间，文 [35] 作了较详细的讨论。作者至今未能找到原文。

为了叙述 Y. Yasui 的一系列有趣研究结果，须引入一些非常基本的概念。

定义 8. (Ю. Смирнов) [36]拓扑空间 X 称作$[\omega_\mu, \infty]$紧，是指 X 的任意开集覆盖中存在势$<\omega_\mu$的子复盖。

关于 (m,n) 紧的研究工作尚有 I. S. Gal[37]，作者文[38] 及 Паровиченке 的工作[39]。

定义 9. (J. Nagata) [40]拓扑空间 X 具有性质(ω_μ)乃指任意 $x\in X$ 及$\alpha<\omega_\mu$，存在 x 的邻域 $U_\alpha(x)$ 及 $S_\alpha(x)$ 满足下列条件：

(1) $\{U_\alpha(x): \alpha<\omega_\mu\}$是 x 处的局部基。

(2) $U_{\alpha_1}(x)\subseteq U_{\alpha_2}(x)$ 及$S_{\alpha_1}(x)\subseteq S_{\alpha_2}(x)$，当$\alpha_2<\alpha_1<\omega_\mu$时。

(3) 若 $y\overline{\in}U_\alpha(x)$，则 $S_\alpha(x)\cap S_\alpha(y)=\phi$。

(4) 若 $y\in U_\alpha(x)$，则 $S_\alpha(y)\subseteq S_\alpha(x)$。

此时说序对集$\{(U_\alpha(x), S_\alpha(x)): \alpha<\omega_\mu\}$具有强 ω_μ-Nagata 结构。

上述这些性质与 CG 条件非常类似，且作者[41]也考虑过类似条件，得到过部分结果，但时间要优先十二年之久。

关于 ω_μ- 可距离化问题，Y. Yasui 于 1975 年证明

定理 26. 对于拓扑空间 X，下列诸条件彼此等价：

(1) X 是 ω_μ- 可距离化的（在拓扑意义下）.

(2) X 具有性质 (ω_μ) .

(3) 存在 X 的一族开覆盖 $\{\widetilde{U}_\alpha: \alpha<\omega_\mu\}$ 且满足下列：

(3.1) $\widetilde{U}_\alpha>\widetilde{U}_\beta$，当 $\alpha<\beta<\omega_\mu$ 时，“$>$”是“加细”

(3.2) 对任意 $x\in X$，$\{st(x, \widetilde{U}_\alpha): \alpha<\omega_\mu\}$均是 x 处的局部基.

(4) X 是 ω_μ- 可加空间，并存在 X 的一族开复盖 $\{\widetilde{U}_\alpha: \alpha<\omega_\mu\}$，使$\{st^2(x, \widetilde{U}_\alpha): \alpha<\omega_\mu\}$形成 x 处局部基.

(5) 对任意 $x\in X$ 及 $\alpha<\omega_\mu$，存在 x 的邻域 $V_\alpha(x)$，使得满足：

(5.1) $\{V_\alpha(x): \alpha<\omega_\mu\}$ 形成 x 处局部基，且 $\alpha_1<\alpha_2<\omega_\mu$ 时，$V_{\alpha_1}(x)\supseteq V_{\alpha_2}(x)$.

(5.2) 对任意 $x\in X$ 及 $\alpha<\omega_\mu$，存在 $\beta=\beta(x,\alpha)<\omega_\mu$，使当 $V_\beta(x)\cap V_\beta(y)\neq\phi$ 时，有 $V_\beta(y)\subseteq V_\alpha(x)$.

(6) X 是 ω_μ- 可加的，且存在一族局部有限的闭覆盖$\{\widetilde{F}_\alpha: \alpha<\omega_\mu\}$，满足下列条件：对任意点 $x\in X$ 及 x 的任意邻域 U，存在 $\alpha<\omega_\mu$ 使 $st(x,\widetilde{F}_\alpha)\subseteq U$.

(7) X 是 ω_μ- 可加空间，且存在一族“保持闭包”(closure preserving) 的闭覆盖$\{F_\alpha: \alpha<\omega_\mu\}$满足下列条件：

对任意点 $x\in X$ 及 x 的任意邻域 U 存在 $\alpha<\omega_\mu$ 使 $st(x, \widetilde{F}_\alpha)\subseteq U$.

定理中的符号说明：$\widetilde{U}_\alpha$ 表示集族，$st(x, \widetilde{U}_\alpha)=\cup\{U: U\in\widetilde{U}_\alpha \text{ 而 } x\in U\}$，$st^2(x,\widetilde{U}_\alpha)=\cup\{U: U\in\widetilde{U}_\alpha \text{ 且 } U\cap st(x,\widetilde{U}_\alpha)\neq\phi\}$.

$\mu=0$ 时，上述诸条件分别是 Nagata-Smirnov 定理，Nag-

ata 定理，Александров-Урысон 定理，Frink 定理，Morita 定理及 Nagami 定理，见文献[42]-[47]。

上述定理中所谓 ω_μ- 距离化乃指拓扑意义下的。应该指出定理中部分结果由 1963 年作者[41]及 I. Juhasz[15] 早已得到过。一些于 1976 年 Nyikos 与 Reichel 独立得到[48]。

§10. 乘积空间. 关于 ω_μ- 可距离化空间的乘积 $X\times Y$，Yasui 于前引论文，证得

定理 27. 两个 ω_μ- 可距离化空间的乘积仍是 ω_μ-可距离化的。

然而有趣的是下列：

定理 28. 设 X，Y 分别是可 ω_μ-及 ω_γ-距离化空间，又 $\mu\neq\gamma$，那么 $X\times Y$ 若对某个序数 λ 是可 λ-距离化的则必 X 或 Y 中至少有一个是全散拓扑。

Yasui 举例说明定理 27 不能拓广至可数个空间的乘积，然而可拓广成箱拓扑情况。

定理 29. 设$\{X_\xi\}$为 ω_μ- 可距离化空间的 α-列，其中 $|\alpha|<\omega_\mu$，则箱拓扑乘积 $\underset{\xi<\alpha}{B}X_\xi$ 仍是 ω_μ- 可距离化的。

定理中 $|\alpha|$ 表示序数 α 的势。Yasui 又举例说明，若将 $|\alpha|<\omega_\mu$条件去掉，则定理不真。

§11. 和，映象

Yasui 关于 ω_μ-距离空间的映象证得下述

定理 30. 设X 是 ω_μ-可距离化的拓扑空间，Y 是拓扑空间. 又设存在 X 向 Y 上的连续闭映象 f 使对任意 $y\in Y$，$f^{-1}(y)$ 均是$[\omega_\mu,\infty]$紧，则 Y 必是 ω_μ-可距离化的。

定理 31. 设 X 是 ω_μ-可距离化拓扑空间，f 是由 X 向拓扑空间 Y 之上的连续闭映象，下述条件等价：

(1) 对任意 $y \in Y$ 均存在邻域的 ω_μ-列，形成局部基。

(2) $b(f^{-1}(y))$ 是 ω_μ-紧的，ω_μ-紧的意思是：离散闭集族的势 $<\omega_\mu$。

(3) Y 是 ω_μ-可距离化的。

这是 A. H. Stone[49]定理及 K.Morita-S. Hanai[50]定理的推广。

定理 32. 设 X，Y 是拓扑空间，M 是 ω_μ-可距离化空间。设 f 是由 M 向 $X\times Y$ 上的闭连续映象。则 X 是全散的或 Y 是 ω_μ-可距离化的。

由定理 32 可见，若 X 与 Y 均非全散时，则 X,Y 均是 ω_μ-可距离化的。于是 $X\times Y$ 亦是 ω_μ-可距离化的。这正是 D. M. Hayman[51]定理的扩充。

五、一致空间及接近空间（proximity）的 ω_μ-距离化问题

§12. 下面考虑：一致空间 (X,u) 的一致结构 u 何时能由 ω_μ-距离引出的问题。

与作者上述定理 24 对照，F.W.Stevenson 与 W.J.Thron 1969 年对一致空间证明下述（[18]定理 3）：

定理 33. 可分离（separable）的一致空间 (X,u) 可以 ω_μ-距离化的充要条件是其一致结构具有线性序基，这种基中最小者其势为 ω_μ。

上述定理优先五年时间即于 1963 年时已为作者得到过（[41]）。在解决了拓扑空间及一致空间的 ω_μ-距离化问题（[2]，[18]）后 Stevenson 接着考虑了接近空间的同样问题。

1971 年，F. W. Stevenson（[52]）推广了 S. Leader

的距离化定理（[53]）．为了达到这个目的，必须采取与Leader不同的一些证明方法，为着引述Stevenson的结果，又须引入下述一些术语．

定义10． 设 (X,δ) 是接近空间，ω_μ 是一正则基数．

(1) 集 $p\subseteq X\times X$ 是 ω_μ-压缩的，当且仅当 p 的势 $\geqslant\omega_\mu$，且设 $A,B\subseteq X$，$A\times B\cap p$ 的势 $\geqslant\omega_\mu$ 时 $A\delta B$．

(2) X 的覆盖 u 称作是 ω_μ-可容许的，当且仅当对任意 ω_μ-压缩集 p 存在 $(x,y)\in p$ 及 $U\in u$ 使得 $x\in U$ 及 $y\in U$．

(3) "对角线"集 (diagonal set) k 是包含 $X\times X$ 对角线 (diagonal) $\triangle$ 的集．

(4) "对角线"的集 k 是 ω_μ-可容许的"对角线"的集，当且仅当对任意 ω_μ-压缩的集 p，$k\cap p\neq\phi$．

Stevenson的结果是证明了下列

定理34． 对任意接近空间，下列三项条件彼此等价：

(1) (X,δ) 可 ω_μ-距离化．即其接近关系可以由某个 ω_μ-距离引出．

(2) 存在 ω_μ-可容许的 ω_μ-覆盖序列 $\{u_\alpha\}$，$\alpha<\omega_\mu$，$\beta<\alpha<\omega_\mu$ 时，$u_\beta>u_\alpha$（即 u_α 是 u_β 的加细）且使得：$A\delta B$ 的充要条件为对任意 $\alpha<\omega_\mu$，存在 U_α，有 $U\cap A\neq\phi$ 及 $U\cap B\neq\phi$．

(3) 存在由 ω_μ-可容许的、对称的、对角线的集组成的 ω_μ-序列 $\{K_\alpha;\ \alpha<\omega_\mu\}$，$\alpha<\beta$ 时，$K_\beta\subset K_\alpha$，且 $A\delta B$ 的充要条件是对所有 $\alpha<\omega_\mu$，$A\times B\cap K_\alpha\neq\phi$．

§13．Sikorski[1]及作者文[2]讨论了 ω_μ-可加拓扑空间的性质．Stevenson则讨论了 ω_μ-接近空间的性质[52]．

定义11． a) X 上的一致结构 (U) 称作是 ω_μ-一致结构乃指 $\cap\{U_i;\ U_i\in(U),i\in I\}\in(U)$，其中 I 的势 $<\omega_\mu$．

b) X 上的接近（proximity）关系 δ 称作是 ω_μ-接近，当且仅当 $A\delta\bigcup\{B_i;\ i\in I\}$时，至少有一个 $i\in I$ 使 $A\delta B_i$，其中 I 的势$<\omega_\mu$。

定义 12. 一致空间（X，$(\overset{\triangledown}{U})$）称作是 ω_μ-有界的，当且仅当对任意$U\in(\overset{\triangledown}{U})$存在势$<\omega_\mu$的集合 A 使得 $U[A]=X$。（X,$(\overset{\triangledown}{U})$）称作严格 ω_μ-有界的是指 ω_μ 是满足上列条件之最小序数。

定理 35. 设 δ 是 X 上的一个 ω_μ- 接近关系，那么唯一地存在一个严格 ω_ν- 有界且与 δ 合谐的（Compatible）ω_ν- 一致结构，$0\leqslant\nu\leqslant\mu$。这个一致结构的基由一切形为$\{A_i\times A_i : i\in I\}$的集形成，其中 $|I|<\omega_\nu$，$A_i\gg B_i$ 且$\{B_i;\ i\in I\}=X$。

这个定理的证明仅须将，例如 Thron[58]，$\mu=0$ 时的方法作一些推广即可。

一个自然的问题是若在上述定理中限于 $\nu=\mu$，且将"ω_μ-一致结构"改为"一致结构"，则上述存在性是否仍唯一呢？Reed 与 Thron 指出[54]，([53]与[54]作者均未找到原文)：如对 $\nu=\mu$，上述定理中存在性不唯一，则对任意 $\nu\leqslant\mu$ 的存在性都是无限个。

[52]对 ω_μ-接近关系证明着下列

定理 36. 设 δ 是 X 上的 ω_μ- 接近关系，$0\leqslant\nu\leqslant\mu$，则于$(\overset{\triangledown}{U}_\nu)$与$(\overset{\triangledown}{U}_\mu)$之间存在着严格递降的，严格 ω_ν-有界的一致结构序列，其中每个一致结构均是与 δ 相和谐。

六、有关的其他方面及问题

1975 年 P. Nyikos 与 H. C. Reichel[55] 研究了零维拓扑空间，非阿几米得距离等，这一工作与本文讨论的问题有

关．（从略）．

F. Hausdorff[33]中考虑过实数的超限序列，设

$$x=(x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_\alpha,\ \cdots)$$

$$y=(y_0,\ y_1,\ \cdots,\ y_\alpha,\ \cdots,\ ),\ (\alpha<\omega_\mu)$$

[3]也定义了序及加法运算（参考[2]），同时还定义乘法：$x\cdot y=(x_0 y_0,\ \cdots,\ x_\alpha y_\alpha\cdots)$．我们认为这种乘法不易理解为实数推广（实际上，实数 x_0 可与$(x_0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\cdots)$ 相等同）．

文[56],[57]推广上述至负脚标，且仅限于 $\alpha<\omega$.

我们定义了新的乘法，并称这样的列为广义数，以广义数为定义域及值域的函数称为广义函数．以自然方式将实函数的 L 积分推广至广义函数的(G)积分．使得非常自然得到 δ 函数及一般分布的理解．将广义数运用至量子场论中的 Jordan-Wigner 反对易关系以解释近代理论物理中的一些发散问题．

最后指出，这篇论文并未将 ω_μ- 空间方面的工作无遗地包括进去．据所知，有 C. J. Knight 的关于箱拓扑的工作[59]及与 §7 有关的作者的一些结果([41]，[60])等，这里就从略了．

参考文献

[1] Sikorski, R., 1950, Fund. Math. Tom 37,125-136.

[2] a) 王戍堂，1964，《数学学报》，14卷5期，619-626.
b) Wang shu-tang, 1964, Fund, Math., Tom 55 101-112.

[3] Sikorski, R., Boolean Algebras. Springer-Verlag, 1960.

[4] Weil, A., Sur les espaces à structure uniform, Paris, 1938,

[5] Cohen, L. W., 1937, Duke Math. Journ. Vol. 3., 610-615.

[6] Hahn, H., 1907, Sitzungsberichte der kaiserlichen Akad. der Wissenschafen, Sec. II. Vol. 116, 601-653.

[7] Gleyzal, A., 1937, Proc. Nat. Acad, USA, Vol. 23, 281-287.

[8] McLane, S., 1939, Bull, Amer. Math. Soc., Vol. 45, 888-890.

[9] Cohen, L. W. and Goffman, 1949, Trans. Amer. Math.Soc., Vol. 66, 65-74.

[10] Gilllman, L. and Jerison, M., Rings of Continuous functions, Van Nostrand Co., 1960.

[11] Gillman, L. and Henriksen, M., 1954, Trans. Amer. Math. Soc, Vol. 77, 340-362.

[12] Gillman, L. and Henriksen, M., 1956, ibid. Vol. 82, 366-391.

[13] Kelley, J. L., General Topology, New York, 1955.

[14] Sikorski, R., 1948, Comptes Rendus de la Societe des Sciences et des Letters de Varsovie, Classe III, 69-96.

[15] Juhász. I., 1965, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 8, 129-145.
Ceder., J.E., MR 33 No 3 #3257.

[16] Hayes, A., 1973, Proc. Cambridge Phil. Soc.,Vol. 74, 67-68.

[17] Monk, D. and Scott, D, 1967, Fund. Math., Tom 53, 335-343.

[18] Stevenson, F. W. and Thron, W. J., 1969, Fund. Math., Tom 65, 317-324.

[19] Cohen, L. W. ard Goffman, C., 1949, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 67, 310-319.

[20] Baer, R., 1929, J. Reire Angew. Math,Vol. 160, 208-226.

[21] EVerett, C. J. and Ulam, S., 1945, Trans, Amer.

Math. Soc., Vol. 57, 208-216.

[22] Sierpinski, W., 1949, Fund. Math., Tom 36, 56-57.

[23] Harris, D., 1971, Fund. Math., 73, 128-142.

[24] Franklin, S. P., 1965, Fund. Math., 57 107-115.

[25] Архангельскии, A. 1963 ДАН СССР, МАТ., 4, 1726 -1729.

[26] Пономарев, в., 1960, Bull. Acad. Polon, Sci., Sér. Math. Astr. Phys., 8, 127-134.

[27] Michael, E. A., 1963, Bull. Amer. Math. Soc., 69, 375-376.

[28] Nyikos, P. J., 1975, Stud. in Top., N. M. Stavarkas and K. R. Allen, Editors, Academic Press, New York, 427-450.

[29] —, On the product of suborderable spaces.

[30] Vaughan, J. E., 1972, Pacific J, Math., 43, 253-266.

[31] Mrowka, S. 1957, Bull, Acad. Pol. Sci., Classe III, 5 : 2, 122-127.

[32] —, 1957, ibid. 5 : 2, 129-132.

[33] Hausdorff, F., Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914.

[34] Yasui, Y., 1975, Math. Japon., Vol. 20 No2, 159-180.

[35] Nedev, S. and Coban, M., 1970/1971, Annuaire de l'univ. des Sofia Faculte des Math., 65, 111-165.

[36] Смирнов, Ю. М., 1950, NЗвАН СССР МАТ., 14, 155-178.

[37] Gál, I. S., 1957, Kon. Ned. Akad. Wet. proceedings, 60, 421-435.

[38] 王成堂：1958, 《科学记录》新辑, 2 : 10, 392-395.

[39] Паровиченко, N. N., 1957, ДАН СССР, 115, 866-868.

[40] Nagata, J., 1957, Jour. of Inst. of Polytech. Osaka City Univ., 8 : 2, 185-192.

[41] 王成堂：《关于ω_μ-可加拓扑空间的两个注记》见本文集。
[42] Nagata, J., 1950, Jour. of Inst. of Polytech. Osaka City Univ., 1, 93-100.
[43] Смирнов, Ю. М., 1951, ДАН СССР, Новия Сер., 77, 197-200.
[44] Morita, K., 1951, Proc. Japan Acad., 27, 632-637.
[45] Frink, A. H., 1937, Bull. Amer. Math. Soc., 13, 133-142.
[46] Morita, K., 1955, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sec. A., 5, 33-36.
[47] Nagami, K., 1969, Math Annalen, 181, 109-118.
[48] Nyikos, P. and Reichel, H.C., 1676, Fund. Math., 93, 1-10.
[49] Stone, A. H., 1956, Proc. Amer. Math. Soc., 7：4, 690-700.
[50] Hanai, S., 1954, Proc. Japan Acad., 30, 285-288.
[51] Hyman, D.M., 1969, Proc. Amer. Math. Soc., 21, 109-112.
[52] Stevenson, F. W., 1971, Fund. Math., 73, 171-178.
[53] Leader,S.,1967,Proc.Amer. Math. Soc.,18, 1084-1088.
[54] Reed, E. E. and Thron, 1969, Trans. Amer. Math. Soc., 141, 71-77.
[55] Nyikos, P. and. Reichel, H. C., 1975, Indag. Math., 37, 120-136.
[56] 王成堂，1979，《中国科学》，1-11.（数学专辑）.
[57] 王成堂，《西北大学学报》（自然科学版）1979年第1期.
[58] Thron, W. J., Topological Structures, New York, 1960.
[59] Knight, C. J., 1964, Box topology, Quart. Jour. of Math.
[60] 王成堂：《ω_μ-可加的拓扑空间（II）》，见本文集.

C.J.Knight关于箱拓扑的一个问题*

王 成 堂

摘　　要

本文宣布C. J. Knight关于箱拓扑一个公开问题（Quart. J. of Math. Oxford (2)，15 (1964) 41—54）的肯定回答。

§1. 一些记号说明

设A是一标号集，$\{E_a:a\in A\}$是一集族，$\underset{a\in A}{X}E_a$将表示它的笛卡尔乘积。

设E_a，$a\in A$，是拓扑空间。取U_a，$a\in A$，为E_a的任何开集。若规定$\underset{a\in A}{X}U_a$恒是$\underset{a\in A}{X}E_a$中开集时（其中U_a可遍取E_a中一切开集），如此定义的拓扑即是箱拓扑（Box Topology）。

若在上述定义中加上如下之要求：

$$\#\{a:a\in A,\ U_a\neq E_a\}<m \qquad (1.1)$$

所得的箱拓扑空间即记作$\underset{a\in A}{\Pi_m}E_a$或$\Pi_m$。其中$\#E$表示集合$E$的势（沿用［2］的记法）。$m$，$n$等均表示超限基数。

* 本文发表于1979年《陕西省数学会论文选辑》。

设x，y是$\underset{a\in A}{X} E_a$的任二元，$pr_a x$表示x的"第a坐标射影——分量"：$x_a = pr_a x$。并引入如下记号：$\delta(x, y) = \{a : a\in A,\ x_a \neq y_a\}$，于是显然就有下列性质

$$\begin{cases} \delta(x, y) = \phi \Longleftrightarrow x = y \\ \delta(x, y) \cup \delta(y, z) \supseteq \delta(x, y) \\ \delta(x, y) = \delta(y, x) \end{cases} \qquad (1.2)$$

引入等价关系R：

$$xRy \equiv \# \delta(x, y) < r \qquad (1.3)$$

其中r是一无限基数。

在等价关系（1.3）之下Π_m的商空间即记作Π_m^r。其 *identification map* 记作p^r。

§ 2. Knight 的问题及解答

Knight 曾于文［2］证得定理（［2］定理［6.3］）

定理．设所有$E_a = E$，$a\in A$．且设E是T_1正则拓扑空间又$r = \omega_0$，则$p^r D$是Π_m^r中的闭集．其中D是$\underset{a\in A}{X} E$的对角线集．

Knight［2］发问：设E是T_1正则空间，且势$<r$的开集族其交仍是开集，那么上述定理对这种r是否成立？

我们从正面回答了这一问题，结果是：

定理．假设E是T_1正则拓扑空间，且E中势$<r$开集族之交仍是开集．则$p^r D$是Π_m^r中的闭集．

参 考 文 献

［1］Gould, G. G. J. London Math. Soc., 36(1961), 273—281.

［2］Knight, C. J. Quart. J. of. Math. Oxford（2）, 15 (1964) 41—54.

ON A PROBLEM OF C.J.KNIGHT

Wang Shu-tang

Abstract

We announced in this paper an affirmative answer to a problem raised by C. J. Knight (Quart. J of Math. Oxford (2), 15 (1964) 41-54) concerning box topology.

某些能够用有理数直线分划的拓扑空间*

王 戌 堂

摘 要

推广［8］的主要定理，本文考虑某些能够由有理数直线分划的拓扑空间（不必是可度量的）．基于W. Sierpinski 的定理(引理1）得到下面的结果．定理：正则、第一可数、自密并且遗传仿紧空间能够由有理数直线分划．定理：遗传仿紧的序拓扑空间可由有理数直线分划当且仅当它是自密的第一可数空间。作为例子，文中举出了一些重要的满足上述定理条件的非度量空间．我们取序 ω_μ—度量空间（$\mu>0$）为例，说明事实：存在有遗传仿紧可线性序空间，不能被有理数直线所分划．

* 本文英文稿即将发表于德意志联邦共和国刊物“Manuscriqta Math”（付印中）。

§ 1 引　论

根据 P. Bankston 和 R. J. McGovern [1]，有

定义 1. 设 X 和 Y 是两个拓扑空间。称 Y (拓扑) 分划 X 如果存在由 Y 到 X 的嵌入族，使得其象构成 X 的一个互不相交的覆盖。

关于拓扑分划的系统研究已在 [1] 中给出。在解决[1]中所提出的问题时，[8] 中证明了，对可度量拓扑空间，能够由有理数直线分划的必充条件为此空间是自密的。

在本文中，我们将推广上述结果。为了这个目的，先做一些准备。

定义 2. 拓扑空间 X 称为是点仿 Lindelof 的，如果对 X 的每个开覆盖，存在点可数的开加细。

我们的论证以下面众所周知的W. Sierpinski 定理[6]为基础：

引理 1. 如果 X 是正则、第一可数的自密可数空间，则 X 同胚于有理数直线，$X \simeq Q$。

下面，我们将集中讨论遗传的点仿 Lindelof，第一可数的正则空间（此处 $=T_3$）。将指出，甚至当“仿 Lindelof”由仿紧代替时，上述空间也未必是可度量的。作为反例，取 X 是 Sorgenfrey 直线 L. 熟知 L 是正则、第一可数并且遗传 Lindelof的因此是遗传仿紧的。但 L 不是可度量空间，因为乘积空间 $L \times L$ 不是正规的。

符号约定. 在下面的讨论中，Q 表示有理数直线。当 A 是拓扑空间的子集时，$\bar{A}$ 表示 A 的闭包。最后，$Y \ll X$ 表示 X 能够由 Y 分划。

§2 主要结果

我们首先证明下述引理。

引理 2. 设 X 是第一可数正则空间，$A\subseteq X$ 且 $x_0\in\overline{A}$。如果 $Q\ll A$，则 $Q\ll A\cup\{x_0\}$。

证明. 设 $A=\cup\{A_\lambda:\ \lambda\in\Lambda\}$，其中$\Lambda$是一指标集，$A_\lambda\simeq Q$ $(\lambda\in\Lambda)$，并且如果 $\lambda\neq\lambda'$则 $A_\lambda\cap A_{\lambda'}=\phi$。由于 $x_0\in\overline{A}$，存在序列$\{x_n\}$使得 $x_n\in A$，$x_n\to x_0$。设 $x_n\in A_{\lambda n}$，记 $B=\cup A_{\lambda n}\cup\{x_0\}$，则 B 是一正则、第一可数、自密的可数子空间。由引理 1，$B\simeq Q$。$A\cup\{x_0\}=\cup\{A_\lambda:\ \lambda\neq\lambda_n,\ n\in N\}\cup B$，因此 $Q\ll A\cup\{x_0\}$。

引理 3. 设 X 是一拓扑空间，$A\subseteq X$。如果 $Q\ll A$，则对每个开集 G 有 $Q\ll A\cap G$。

证明. 设 $A=\cup\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$为如上的分解。由于 G 是开集，如果对每个 $\lambda\in\Lambda$ 记 $B_\lambda=A_\lambda\cap G$，则或者 $B_\lambda=\phi$ 或 B_λ 是正则、第一可数、自密的可数子空间。引理 3 立即由引理 1 得到。

引理 4. 设 X 是正则、第一可数的遗传点仿 Lindelof 空间。如果对每个 $x\in X$ 存在一个开邻域 $U(x)$，$Q\ll U(x)$，则 $Q\ll X$。

证明. 设 $U(x)$如上所给定，记 $U=\{U(x):x\in X\}$。由假设，存在点可数的开加细 $V=\{v_\alpha:\alpha<\omega_\mu\}$。由引理 3，对每个 $\alpha<\omega_\mu$，集 V_α 可以分解为不相交子集族 $V_\alpha=\cup\{V_{\alpha,\lambda^\alpha}:\lambda^\alpha\in\Lambda_\alpha\}$使得 $V_{\alpha,\lambda^\alpha}\simeq Q$。从 $V_{\alpha,\lambda^{\overline{\alpha}}}$ 出发，能够定义可数集 $V'_{\alpha,\lambda^\alpha}=\cup\{V_{\beta,\lambda\beta}:\beta<\omega_\mu,\lambda^\beta\in\wedge_\beta$ 和 $V_{\beta,\lambda^\beta}\cap V_{\alpha,\lambda_\alpha}\neq\phi\}$。一般地，由归纳法，如果 $V^n_{\alpha,\lambda^\alpha}$ 已定义并且可数，则定义

$V^{n+1}_{\alpha,\lambda\alpha} = \bigcup \{V_{\beta,\lambda^\beta} : \beta < \omega_\mu,\ \lambda^\beta \in \wedge_\beta$ 并且 $V_{\beta,\lambda^\beta} \cap V_{\alpha,\lambda_\alpha} \neq \phi.\}$
最后，记 $V^*_{\alpha,\lambda^\alpha} = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n_{\alpha,\lambda\alpha}$，则由引理1，$V^*_{\alpha,\lambda^\alpha} \simeq Q$. 不难证明如果 $V^*_{\alpha,\lambda_1^\alpha} \neq V_{\beta,\lambda_2^\beta}$ 则 $V^*_{\alpha,\lambda_1^\alpha} \cap V^*_{\beta,\lambda_2^\beta} = \phi$， 因此 $Q \ll X$.

利用类似的方法可以证明下列的

引理5. 设 $X = X_1 \cup X_2$ 是正则的第一可数拓扑空间（不一定要求 $X_1 \cap X_2 = \phi$ 也不要求 X_i 是开集）. 如果 $Q \ll X_i (i=1,2)$，则 $Q \ll X$.

现在我们可以证明下列

定理1. 设 X 是一正则、第一可数、自密的遗传点仿 Lindelof 空间. 则 $Q \ll X$。

证明. 在定理1的假定下，我们首先有下述断言.

断言1. 如果 $A \subseteq X$ 自密，则存在 $B \subseteq A$ 使得 $B \simeq Q$.

事实上，对每个点 $x \in X$ 存在局部基 $\{V_n(x)\}$，其中 $n \in N$ 并且如果 $m < n$ 则 $V_n(x) \subseteq V_m(x)$. 由归纳法不难证明，存在可数子集的序列 $\{A_n\}$：$A_n \subseteq A$，$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$，并且如果 $x \in A_n$，则 $V_n(x) \cap (A_{n+1} - \{x\}) \neq \phi$. 设 $B = \bigcup_n A_n$，则 B 是满足引理1条件的子空间，所以上述断言得证.

断言2. X 可以分解为两部分 $X = X_1 \cup X_2$，其中 $Q \ll X_1$ 且 X_2 是疏的.

事实上，设 $\mathscr{A}$ 是具有下述性质的子集的极大族：对每个 $A \in \mathscr{A}$，$A \simeq Q$；并且如果 $A \neq A'$ 是 $\mathscr{A}$ 的两个元素，则 $A \cap A' = \phi$. 设 $X_1 = \bigcup \mathscr{A}$ 和 $X_2 = X - X_1$，则显然 $Q \ll X_1$，且 X_2 是疏的：因为由断言1，如果 $C \subseteq X_2$ 自密，则 C 将包含一个同胚于 Q 的子集. 这与 $\mathscr{A}$ 的极大性矛盾. 因此断言2得证.

对每个疏集 C，定义一个序数 $\alpha(C)$ 如下，它称为 C 的长度. 记 C' 表示 C 的导集，则有下列

$$C^0 \supseteq C^1 \supseteq \cdots \supseteq C^\xi \supseteq \cdots \quad \xi < \mu,$$

其中 μ 是序数，$C^0 = C$ 并且

$$C^\xi = \begin{cases} (C^\beta)' \cap C, & \text{如果 } \xi = \beta + 1 \text{ 是孤立数;} \\ \bigcap_{\eta \in \xi} C^\eta, & \text{如果 } \xi \text{ 是极限数。} \end{cases}$$

$\alpha(C)$ 表示第一个满足 $C^{\alpha(C)} = C^{\alpha(C)+1}$ 的序数，则 $\beta > \alpha(\alpha)$，$C^\beta = C^{\alpha(C)}$. 由于 C 是疏的，$C^{\alpha(C)} = \phi$.

对每个上述断言中的分解 $X = X_1 \cup X_2$，对应一个序数 $\alpha(X_2)$. 设 $\alpha(X)$ 表示这些序数的最小者. 则定理的证明便立即由下述的断言 3 得到.

断言 3. 给定满足定理假设的空间 X，且设 $\alpha(X) = \alpha_0$. 如果对每个 Y 定理为真，其中 $\alpha(Y) < \alpha_0$. 则 $Q \ll X$.

此断言的证明分作下面几种情况.

情形 1. 如果 $\alpha_0 = 0$ 则 $Q \ll X$.

首先，如果 $X_2 = \phi$，显然有 $Q \ll X$. 其次，如果上面提到的分解 $X = X_1 \cup X_2$ 中，X_2 为单点集 $X_2 = \{x_0\}$，则由引理 2 $Q \ll X$.

最后，$\alpha(x) = 0$ 表示 X_2 是散的（对于自身）. 所以对每个点 $x \in X_2$ 存在开邻域 $U(x)$ 使基数 $|U(x) \cap X_2| \leqslant 1$. 显然，子空间 $U(x)$ 满足定理中的一切假设，利用前面的论证即有 $Q \ll U(x)$. 记 $U = \bigcup \{U(x) : x \in X_2\}$ 时，则由引理 4，$Q \ll U$. 现在 $X = X_2 \cup U$ 并且 $Q \ll X_2$，故由引理 5，$Q \ll X$.

情形 2. 如果 $\alpha_0 = \beta_0 + 1$ 为孤立数. 则 $X_2^{\beta_0}$ 是散的（关于自身）；对每个 $x_0 \in X_2$ 存在开邻域 $U(x_0)$ 使得 $|U(x_0) \cap X_0^{\beta_0}| \leqslant 1$. 子空间 $V = U(x_0) - \{x_0\}$ 满足定理假设（以 V 代替 X）并且有长度 $\alpha(V) \leqslant \beta_0$，所以 $Q \ll V$. 由引理 2，$Q \ll U(x)$. 因此由引理 4 和 5 得到 $Q \ll X$.

情形3．如果 α_0 是极限数．

由引理3，对每个点 $x_0\in X_2$，存在开邻域 $U(x_0)$ 具有长度 $\alpha(U(x_0))<\alpha_0$，否则将有 $x_0\in X_2^{\alpha_0}$，这是矛盾．由断言3中的假设，$Q\ll U(x_0)$．于是据引理4与5得到 $Q\ll X$．

至此断言3证完，因此定理的证明全部完成，

§3 一些推论

可度量空间满足定理1的假设，因此作为推论便得到[8]的主要定理．

定理2．可度量空间能够由有理数直线分划当且仅当它是自密的．

在本文的开头已经指出，Sorgenfrey 直线 L 满足定理1的假设，虽然它不可度量．这里我们给出另一个重要例子，即是 Suslin 直线 S．Suslin 直线 S 是线性序拓扑空间，满足 c．c．c．但不是可分的．如周知的那样，S 的存在性与 ZFC 独立。

空间 X 的 Cellularity 定义为 $c(X)=sup\{|G|: G$ 是不相交开集族$\}+\omega$（见[4]）。由条件 c．c．c．我们有 $c(S)=\omega$．不难证明，如果 X 可度量，且 $c(X)=\omega$ 则 X 必是可分的，这即说明 S 是不可度量的．又由 c.c.c. 可知 S 满足定理1的条件．

下面我们讨论遗传仿紧序拓扑空间．下面的例子说明了这样的空间不一定总是可以由有理数直线分划的．

例．对一非可数的规则基数 ω_μ，X 表示一切实数 ω_μ-序列的集合，即 X 包含一切这样的元素 x：

$$x=(x_0, x_1, \cdots, x_\xi, \cdots), \ \xi<\omega_\mu,$$

其中 x_ξ 是实数。

在$\boldsymbol{X}$中已定义了序关系及运算 +（见［7］），这样$\boldsymbol{X}$是一具有特征 ω_μ 的序群。度量函数 $\rho(x,y)=|x-y|$，其中 x，$y \in \boldsymbol{X}$，使$\boldsymbol{X}$成为一ω_μ-度量空间。已知（见［2，3］）ω_μ-度量空间是仿紧的，下边我们将看出$\boldsymbol{X}$不能由有理数直线分划。事实上，设 A 同胚于 Q，由于$\boldsymbol{X}$是 ω_μ-可加空间，子空间 A 必为 ω_μ-可加，这显然是不可能的。

下边，我们能够给出充要条件来判别遗传仿紧序空间是否能够由有理数直线分划。实际下列定理具有更广泛的意义。

定理 3. 设 X 是遗传的点仿 Lindelof 序空间。则 $Q \ll X$ 当且仅当 X 是第一可数的自密的。

证明. 充分性立即由定理 1 得到.

必要性. 由于“自密”是显然的，仅需证当 $Q \ll X$ 时，X 为第一可数。$Q \ll X$ 表示 X 可以分解为不相交的部分 $X=\bigcup\{X_\lambda : \lambda \in \wedge\}$，其中 $X_\lambda \simeq Q$。设 $x_0 \in X$，则存在 λ_0 使 $x_0 \in X_{\lambda_0}$。设$\{x_n\}$和$\{y_n\}$是两个满足这样条件的点列：$x_n, y_n \in X_{\lambda_0}$；$x_n < x_0$，$y_n > x_0$；$x_n \to x_0$ 且 $y_n \to x_0$。记 $V_{m,n}=\{x \in X : x \in (x_m, y_n)\}$和 $V=\{V_{m,n} : m,n \in N\}$，我们下边将证明 V 是点 x_0 的局部基。为此设 U 是任意的开区间 $U=(a, b)$，$x_0 \in U$，只须证明对某个 m 和 n 有 $V_{m,n} \subseteq U$ 就行了。由于 $X_{\lambda_0} \cap U$ 在 X_{λ_0} 中开并且包含 x_0，所以存在对子 m，n 使得 $x_m \in X_{\lambda_0} \cap U$，$y_n \in X_{\lambda_0} \cap U$。因此$V_{m,n} \subseteq U$。证完。

可以进一步推广上述定理到局部序或广义（generalized）序的情形。广义序空间的定义以及与序空间的关系可参看［5］

参考文献

[1] P. Bankston, R.J. McGovern, Topological partitions, Gen. Topology Appl. 10(1979)215-229.

[2] A. Hayes, Uniformities with totally ordered bases have paracompact topologies, Proc. Cambridge Phylos. Soc. 74(1973)67-68.

[3] I. Juhasz, Untersuchungen über $\omega\mu$-metrisierbare Räume, Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sec. Math. 8(1965)129-145.

[4] —, Cardinal functions in topology, Math. Centre. Tracts34(1975), Amsterdam.

[5] D. Lutzer, On generalized ordered spacs, Dissertations Math. 89(1971).

[6] W. Sierpinski, Sur une propriété topologique des ensembles dénombrables dense en soi, Fund. Math. 1(1920)11-16.

[7] Wang Shu-tang, Remarks on $\omega\mu$-additive spaces, Fund. Math. 55(1964)125-136.

[8] Wang Shu-tang, The rational line partitions every self dense metrizable space, Topology Appl. 12(1981) 331-332.

ON SOME SPACES WHICH CAN BE PARTITIONED BY THE RATIONAL LINE

Wang Snu-tang

Abstract

Extending the Main Tneorem of [8], we consider

in this paper some topological spaces (not necessarily metrisable) which can be partitioned by the rational line. Based on W. Sierpinski's theorem (Lemma 1) the following results are obtained. Theorem. A regular, first countable, self-dense and hereditarily paracompact space can be partitioned by the rational line. Theorem. A hereditarily paracompact orderable space can be partitioned by the rational line iff it is self-dense and first countable. Some important non-metrisable spaces satisfying hypotheses of above theorems, as examples, are enumeratd. We take orderable $\omega\mu$-metric spaces as example to illustrate the fact: there exist spaces which are hereditarily paracompact, orderable but can't be partitioned by the rational line.

THE RATIONAL LINE PARTITIONS EVERY SELF-DENSE METRISABLE SPACE*

Wang Shu-tang

Abstract

In the present note we shall prove that a metrisable space can be partitioned by the rational line iff that space is self-dense. This gives an affirmative answer to a question raised dy Bankston McGovern [1]

AMS Subj. Class. (1980): 54B15, 54E35

topological spaces tapological partions self-dense metrisable spaces

Recently P. Bankston and R. J. McGovern [1] established a number of interesting theorems concerning topological partitions. (A space Y *partitions* a space X if there is a family of embeddings of Y into X such that the images form a cover of X by pairwise disjoint sets.) One question they raised (Question 1.6 in [1]) is to

* First published in ‹Topology and its Aplications› 12(1981) 331-332.

determine whether every self-dense metrisable space (i. e., one without isolated points) can be partitioned by the rational line R. They answered the question affirmatively in the separable case, and it is the purpose of this note to give a positive answer in general.

To prove the main result, we will use the following three lemmas.

Lemma 1 (W. Sierpinski [2]). *If X is a regular, countable, first countable, self-dense space, then $X \simeq R$.*

Lemma 2 (see the proof of Theorem 1.4(a) in [1]). *If X is a regular, first countable, self-dense space and $x \in X$, then there is a homeomorphic copy Q of R with $x \in Q \subseteq X$.*

Remark. Lemma 2 is an easy consequence of Lemma 1.

Lemma 3 (A.H. Stone [3]). *Every scattered metrisable space is σ-discrete, as well as an absolute F_σ relative to the class of all metrisable spaces.*

We now prove the main theorem of the present note, establishing an affirmative answer to the Bankston-McGovern queston.

Theorem. *Let X be a self-dense metrisable space. Then R partitions X.*

proof. As in the proof of Theorem 1.4(a) in [1] , let $L = \{Q_i : i \in I\}$ be a maximal collection of pairwise disjoint homeomorphic copies of R in X. By Lemma 2, $\cup L$ is dense in X; moreover $S = X / \cup L$ is scattered. Assuming

$\mathring{S} \neq \emptyset$, we can use Lemma 3 to obtain $\mathring{S}$ as a countable union of closed discrete sets. Thus we can express S as a disjoint union $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ where each S_n is discrete and "separared" -i.e.,for each $n<\omega$ there is a family $\{U_x : x \in S_n\}$ of pairwise disjoint open subsets of X with $x \in U_x$ for each $x \in S_n$.

For each prime number $p \geqslant 2$ let $R_p \subset R$ denote the "p-adic rationals" $\{m/p^n : m, \text{ n integers}, n \geqslant 1\}$. Then the sets R_p partition R into a countable number of copies of R, each of which is dense in R. Thus for each $i \in I$, Q_i can be decomposed into a countable collection $\{Q_{i,n} : n<\omega\}$of pairwise disjoint copies of R, each of which is dense in Q_i. Let $L_n = \{Q_{i,n} : i \in I\}$. Then $\bigcup L_n$ is dense in X for each n; so for each $n<\omega$, $X_n = S_n \cup \bigcup L_n$ is a self-dense metrisable space which is a disjoint union of a separated set (S_n) and a number of copies of R. Since the X_n's form a partition of X. it suffices to prove that each X_n can be partitioned by R. So without loss of generality, we can assume that the original collection L was chosen in such a way that S is in fact separated, say, by the family$\{U_x : x \in S\}$. For each $x \in S$, let $L_x \subset L$ be a countable subcollection with $x \in \overline{\bigcup L_x}$. By Lemma 1, $Q_x = (\{x\} \cup \bigcup L_x) \simeq R$; so we can find an open $V_x \subset U_x$ with $x \in V_x$ and $V_x \cap Q_x$ nonempty and clopen in Q_x. Since Q/V_x is clopen in Q for each $Q \in L_x$, we have that $V_x \cap Q_x \simeq$

$\dot{R}$ always and $\dot{Q}-\dot{V}_x \simeq \dot{R}$ whenever $\dot{Q} \in \dot{L}$ and $\dot{Q}-\dot{V}_x \neq \emptyset$. Therefore the family

$$L' = \{V_x \cap Q_x : x \in S\} \cup \bigcup \{\{Q - V_x : Q \in L_x\} : x \in S\} \cup (R - \bigcup \{L_x : x \in S\})$$

gives a partition of X by R. □

Acknowledgement

I wish to thank the referee for suggestions which served to simplify an earlier proof of the above theorem.

References

[1] P.Bankston and R.J.McGovern, Topological partitions, Gen. Topology Appl. 10(1979) 215-229.

[2] W. Sierpinski, Sur une propriete topologique des ensembles denombrables dense en soi, Fund. Math. 1(1920) 11-16.

[3] A. H. Stone, kernel constructions and Borel sets, Trans. Amer. Math. Soc. 107(1963) 58-70.

二分支理论的泛函分析导引*

王戍堂

摘　要

本文是一综述性文章，以不大的篇幅较系统介绍了泛函分析的基本知识，目的在于由泛函分析的讨论引出物理学的二分支理论。

"分支图"在I・Prigogine为首的布鲁塞尔学派创建的非平衡热力学中，占据着一个关键性的地位。

本文从泛函分析的角度，来向物理学家简要介绍二分支数学理论是如何从泛函分析引导出来的。本文一共分七个部分，前六部分介绍泛函分析的基础知识，最后一部分介绍从泛函分析引出二分支理论。

一、距离空间及压缩映象

§1. 基本概念

定义1.1　设X是一集，对于其中任意二点x，y均有正

*本文是在1979年全国非平衡统计物理会议上的专题综合报告，并首次发表于该会议的论文选辑。

实数$\rho(x, y)$对应且满足下列三项基本条件：

(i) $\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$；

(ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$； (对称性)

(iii) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$. (三角不等式)

此时称 X 为以 ρ 为距离函数的距离空间。

有了距离的概念，即能定义开球及开集、闭集等拓扑概念了，此不详述。下面只介绍一种“收敛”概念。

定义 1.2. 距离空间 X 中点列$\{x_n\}$称作是收敛于点$x_0 \in X$，是指 $\rho(x_0, x_n) \longrightarrow 0$，或等价地说便是：

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$（自然数），使当 $n \geqslant N$ 时$\rho(x_0, x_n) < \varepsilon$.

从距离三角不等式易知

定理 1.1 若 $x_n \longrightarrow x_0$ 则必满足下列条件：

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N, \ \text{当} m, n \geqslant N \text{时} \ \rho(x_m, x_n) < \varepsilon. \quad (1.1)$$

满足定理中后一条件的列称作基本列，定理 1.1 是说“凡收敛列均是基本列”. 然而该定理之逆一般并不成立. 可以象 Cantor 将有理数完备化为实数直线的方法将一般距离空间完备化. 此时在完备空间内“凡基本列均是收敛列”，于是 Cauchy 收敛准则成立.

距离空间概念的引入，能使许多表面不同的问题纳入同一处理之中. 下边举几个距离空间的例子.

例 1. n 维欧氏空间是完备距离空间.

例 2. 在研究连续函数一致收敛问题时，可按下述方法引入空间.

$[0, 1]$ 上定义的一切连续函数形成集记作 $C_{[0,1]}$，$[0, 1]$ 上每一连续函数此时乃作为集中一个元素看待（或说是“点”），$C_{[0,1]}$ 中任意二元 x, y 之间的距离定义作：

$$\rho(x,y)=\max_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)| \tag{1.2}$$

易知$C_{[0,1]}$是完备距离空间。

例 3，设$L^p_{[0,1]}$表示〔0,1〕上定义的一切p幂 Lebesgue 可积函数作元所形成之集，即

$$\int_0^1 |x(t)|^p dx<\infty, \tag{1.3}$$

$L^p_{[0,1]}$中二元x，y之间的距离定义作

$$\rho(x,y)=\left[\int_0^1 |x(t)-y(t)|^p dt\right]^{1/p} \tag{1.4}$$

其中p为正数，$p\geqslant 1$。实变函数论中证明：$L^p_{[0,1]}$是完备距离空间（例如参看那汤松《实变函数论》第七章）。

例 3 中$L^p_{[0,1]}$可推广成多元函数，例如定义域可为n维欧氏空间中有界闭域$\overline{D}$代替，于是得到完备距离空间$L_p(D)$。

例 4。$C_{k+\alpha}(\overline{D})$。这个空间的元素（点）$u$是$\overline{D}$上的函数它具有直到$k$阶的导数，且$k$阶导数均满足指数$\alpha$($\alpha$：$0<\alpha\leqslant 1$）的 H older 不等式 $|D^k u(x)-D^k u(y)|\leqslant C|x-y|^\alpha$，$u$，$v$间距离$\rho(u,v)$由下式给出

$$\rho(u,v)=\sum_{|l|\le k}\sup_{x\in\overline{D}}|D^l u(x)-D^l v(x)|$$

$$+\sum_{|l|\le k}\sup_{x,y\in\overline{D}}\frac{|D^l[u-v](x)-D^l[u-v](y)|}{|x-y|^\alpha} \tag{1.5}$$

其中 $l=(l_1,\ l_2\cdots,\ l_n)$，$|l|=\sum_{i=1}^{n} l_i$，

$$D^l u(x)=\frac{\partial^{|l|}u(x)}{\partial x_1^{l_1}\cdots\cdots\partial x_n^{l_n}},\quad [u-v](x)=u(x)-v(x)$$

而l_i为非负整数。

很容易直接验证，$C_{k+\alpha}(\overline{D})$是完备距离空间。

众所周知，空间完备性的作用乃是极限理论（因而整个数学分析）的基础。

§2. 压缩映象原理.

波兰数学家S. Banach分析了代数方程、微分方程、积分方程等的一系列存在唯一性定理的证明，抓住了这些表面不同定理的本质而提炼成下面的一个抽象定理，即著名的Banach压缩映象原理。

定理2.1（压缩映象原理）. 设X是完备距离空间，T是把X映入自身的映象，且满足压缩条件：

$$\rho(Tx,\ Ty)\leqslant\alpha\rho(x,\ y) \tag{1.6}$$

其中$0\leqslant\alpha<1$是常数，于是有唯一不动点x_0，即x_0满足方程$Tx_0=x_0$，且x_0是唯一的。

证　首先，由（1.6）知T是连续的[1]：

$$x_n\longrightarrow\bar{x}\text{时}\qquad Tx_n\longrightarrow T\bar{x}. \tag{1.7}$$

实际上，$\rho(Tx_n,\ T\bar{x})\leqslant\alpha\rho(x_n,\ \bar{x})\longrightarrow O$

其次，任意取$x_1\in X$，并定义：$x_2=Tx_1$，$\cdots$，$x_n=Tx_{n-1}$ ……于是得一点列

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots \tag{1.8}$$

由压缩条件（1.6）$\rho(x_m,\ x_{m-1})==\rho(Tx_{m-1},Tx_{m-2})\leq$ $\leq\alpha\rho(x_{m-1},\ x_{m-2})\leq\alpha^2\rho(_{m-2},\ x_{m-3})\leq\cdots\leq\alpha^{m-1}\rho(x_1,\ x_0)$.

$$\tag{1.9}$$

于是由（1.6），对任意自然数n，p将有下式：

$\rho(x_{n+p},\ x_n)\leqslant\rho(x_{n+p},\ x_{n+n-1})+\rho(x_{n+p-1},\ x_{n+p-2})+\cdots$ $+\rho(x_{n+1},\ x_n)\leqslant\alpha^{n+p-1}\rho(x_1,\ x_0)+\alpha^{n+p-2}\rho(x_1,\ x_0)+\cdots+$

（1）不加声明的话，本文中所有收敛关系均是指在范数意义下的。

$$\alpha^n\rho(x_1, x_0) = (\alpha^{n+p-1} + \alpha^{n+p-2} + \cdots + \alpha^n)\rho(x_1, x_0) < \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0) \qquad (1.10)$$

由（1.10）知（1.8）为基本列，设（1.8）的极限为x_0，$x_n \longrightarrow x_0$，再由 $x_n = Tx_{n-1}$

便得 $Tx_n \longrightarrow x_0$，另一方面由连续性（1.7）及 $x_n \longrightarrow x_0$，又应有 $Tx_n \longrightarrow Tx_0$，从而最后有

$$Tx_0 = x_0 \qquad (1.11)$$

这就证明了不动点的存在性．用反证法可证其唯一性：设x_0，x'_0是二不同的且均满足（1.11）的点，于是 $x_0 = Tx_0$，$x_0' = Tx_0'$，由 (1.6)

$\rho(x_0,\ x_1) = \rho(Tx_0,\ Tx'_0) \leqslant \alpha\rho(x_0,\ x'_0) < \rho(x_0,\ x'_0)$这是矛盾，因此不动点是唯一的． 〈证毕〉

后来的发展，愈来愈显示出不动点原理应用的广泛性，另一方面对上述定理本身的研究直到近年仍有大量的工作．为了尽快介绍基本内容，这些均从略了．（可参看：关肇直著《泛函分析讲义》）．

除完备性外，还有两个重要概念值得一提．

定义． 设 X 是距离空间，而 X 的任意点列$\{x_n\}$中均包含有收敛子列，即称 X 是列紧的．

容易证明，X 若是列紧的，则 X 必是完备的．逆不真．

定义． 设 X 是距离空间，若有一点列$\{x_n\}$存在使$\{x_n\}$于X内到处稠密，即说 X 是可分的．

二、Banach 空间

§3．Banach 空间是一类广泛的空间，它具有代数结构

（向量空间），又同时有量度（范数）概念。

定义 3.1 设 X 是一集，K 是复（实）数域，如果下列条件成立，便称 X 为一复（实）线性空间：

(i) 于 X 上有加法运算"+"使得 X 在此运算下成为 Abel 群；

(ii) 任意复（实）数 α 与任意 $x\in X$ 均可相乘：$\alpha x\in X$，乘积满足条件：

(a) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$；

(b) $1x=x$；

(c) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$；

(d) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

定义 3.2 设 X 是复（实）线性空间，且设 $\forall x\in X$ 均定义了非负实数 $\|x\|$ 满足条件

(i) $\|x\|\geqslant 0$；且 $x=0\Longleftrightarrow\|x\|=0$；

(ii) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$；

(iii) $\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$.

此时称 X 是复（实）线性赋范空间，x 的范数为 $\|x\|$.

上述空间内，若 x，y 二点之间的距离定义为：$\rho(x,y)=\|x-y\|$，则自然成距离空间，若此距离空间是完备的，即说上述 X 是复（实）Banach 空间.

在欧氏空间内如何把点与以原点为起点的矢量等同看待是大家熟知的. 在 § 1 例 2 及 3 中也可把函数当作"矢量"（$f+g$，αf 均理解作按点的相应运算），而范数 $\|x\|$ 定义作 $\|x\|=\rho(x;\ \theta)$（θ 表示群中的零元），于是 $L_p(\overline{D})$ 与 $C_{1+\alpha}(\overline{D})$ 均成为 Banach 空间.

Banach 空间的例子尚有许多许多，此不述.

§4. 有界线性算子

定义 4.1 由线性赋范空间 X 中某子集 D 到线性赋范空间 Y 中的映象 T 又叫作算子，D 是算子 T 的定义域，记作 $D(T)$，而称 $N(T)=\{y: y=Tx, x\in D(T)\}$ 为算子 T 的值域。

T 的连续性：$x_n\longrightarrow x_0$ 时 $Tx_n\longrightarrow Tx_0$。

T 的可加性，是指 $T(x+y)=Tx+Ty$。

T 的齐次性，是指 $T(\alpha x)=\alpha Tx$，（显有 $T(\theta)=\theta$）

T 的有界性是指存在正数 M，使当 $x\in D(T)$ 时 $\|Tx\|\leqslant M\|x\|$。

具有可加性及齐性的算子称作为线性算子

又于上述定义中将 Y 取作实（或复）数域时，映象 T 即称作泛函。

算子及泛函的具体例子很多，这里不谈。下边只简单介绍它们的一些常用的性质。

定理 4.1 线性算子 T 连续的充要条件是 T 为有界算子。

证．充分性，设 T 是有界线性算子，于是由 $\|Tx_n-Tx_0\|=\|T(x_n-x_0)\|\leqslant M\|x_n-x_0\|$ 显然推知：$x_n\longrightarrow x_0$ 时 $Tx_n\longrightarrow Tx_0$。

必要性，只须证明：T 无界时，则 T 不连续，实际上，此时必有一列点 x_n 满足条件

$$\|Tx_n\|\geqslant n\|x_n\|,\text{ 若取 } x_n^*=\frac{x_n}{n\|x_n\|},\text{ 则有}$$

$$\|x_n^*\|\longrightarrow 0\left(\|x_n^*\|=\frac{1}{n}\right),\text{ 然 }\|Tx_n^*\|=\left\|T\left(\frac{x_n}{n\|x_n\|}\right)\right\|$$

$$=\frac{1}{n\|x_n\|}\|Tx_n\|\geq 1.$$

因此，$x_n^*\longrightarrow\theta$ 而 Tx_n^* 不趋于 θ。因此 T 不是连续算子（我们以 θ 同时表示不同空间的零

元）.

下边我们定义有界算子 T 的范数。

定义 4.2 有界算子 T 的范数为

$$\|T\| = \operatorname*{Sup}_{x\in X}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

不难直接验证：$\|Tx\|\leqslant\|T\|\|x\|$. 且$\|T\|$是满足$\|Tx\|\leqslant M\|x\|$之诸 M 中的最小者。对于线性算子（即可加、齐次算子）且易知$\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1}\|Tx\|$.

定义 4.3 设 T_1，T_2 为两个映 X入 Y的线性算子且$D(T_1) = D)T_2)$. 定义 T_1+T_2，αT 为：

$$(T_1+T_2)x = T_1x+T_2x$$

$$(\alpha T)x = \alpha(Tx)$$

易知，此时所有的 T(不妨设 $D(T) = X$)形成线性赋范空间 L（定义 4.2 范数意义下）. 不仅如此，下列定理成立

定理 4.2 设 Y 是完备线性赋范空间，则上述 L 也是完备的。即当 Y 是 Banach 空间时 L 也是 Banach 空间。称 L 为线性算子空间。

定理的证明是直接的，从略（可参看例如南大编的《泛函分析》第二章 § 2）.

下边 H. Hahn 与S. Banach的线性泛函的延拓定理是泛函分析中基本重要定理之一。

定理 4.3 (Hahn—Banach—Ascoli). 在实线性赋范空间 X 的子空间 E 上定义的实有界线性泛函 $f(x)$ 可以保持范数地延拓到整个 X 上，就是存在 X 上的有界线性泛函 $F(x)$ 满足：

(i) $x\in E$ 时 $F(x) = f(x)$;

(ii) $\|F\|_X=\|f\|_E$.

证。只就 X 是可分空间情况作证明，一般情况要用到超限数的理论。

第一步，对 E 内任二点 z'，z'' 及 X 的任意点 x_0，首先证明：

$$f(z')-\|f\|\cdot\|z'+x_0\|\leqslant f(z'')+\|f\|\cdot\|z''+x_0\|.$$

实际上，上式可由下式立即推出

$$f(z')-f(z'')=f(z'-z'')\leqslant\|f\|\cdot\|z'-z''\|\leqslant\|f\|\cdot$$
$$(\|z'+x_0\|+\|z''+x_0\|).$$

第二步，由上可见不等式成立 $\inf\limits_{z'\in E}\{f(z')+\|f\|\cdot\|z'+x_0\|\}\geqslant\sup\limits_{z''\in E}\{f(z'')-\|f\|\cdot\|z''+x_0\|\}$。前一确界记作 c' 后一(上)确界记作 c''，于是 $c''\leqslant c'$。

第三步，现在考虑 f 的延拓问题。任取 $x_0\overline{\in}E$，并取(真)包含 E 的线性空间 $E_1=\{x;\ x=z+tx_0$，其中 $Z\in E$，t 是实数$\}$。按第二步将有 c' 及 c'' 满足 $c''\leqslant c'$，任取 c：$c''\leqslant c\leqslant c'$，并定义泛函：$f_1(z+tx_0)=f(z)-ct$。显见 f_1 是 f 的线性延拓 $(D(f_1)=E_1\supset E)$。以下证明 $\|f_1\|=\|f\|$。

第四步，$\|f_1\|=\|f\|$ 的证明。只须证明 $\|f_1\|\leqslant\|f\|$ 即已足够，不妨设 $t_0>0$，$y_0=z_0+t_0x_0$ ($t_0<0$ 的情况可类似处理)，由 c 的取法及 $\frac{1}{t_0}z_0\in E$ (再注意 $t_0>0$) 知

$$-\left(f\left(\frac{1}{t_0}z_0\right)+\|f\|\cdot\left\|\frac{1}{t_0}z_0+x_0\right\|\right)t_0\leqslant-ct_0\leqslant-\left(f\left(\frac{1}{t_0}z_0\right)-\right.$$
$$\left.-\|f\|\cdot\left\|\frac{1}{t_0}z_0+x_0\right\|\right)t.$$

此即 $\quad -f(z_0)-\|f\|\cdot\|z_0+t_0x_0\|\leqslant-ct_0\leqslant-f(z_0)+\|f\|\cdot\|z_0+t_0x_0\|$

从而不难推出

$$|f_1(y_0)|=|f(z_0)-ct_0|\leqslant\|f\|\cdot\|z_0+t_0x_0\|$$

于是$\|f_1\|_{E_1}\leqslant\|f\|$.

第五步，假定 X 是可分的，x_1，x_2，…，x_n，… 于 X 到处稠密．可按前四步办法，将 f 逐步延拓成整个空间 X的线性泛函，且保持范数不变，此不详论．

〈证毕〉

推论． 设 X 是线性赋范空间，对 X中任意点x_0只要$x_0\neq\theta$，则必存在泛函 $f(x)$（自然是连续、线性，为着简单起见，今后所说泛函即认作是连续、线性泛函）适合：$\|f\|=f(x_0)=\|x_0\|$.

上述推论说明，在线性赋范空间内有足够多的泛函存在：设 $x_0\in X$，且对 X 上的任意连续线性泛函 f 恒有$f(x_0)=0$，则必 $x_0=\theta$．定理 4.3 由 Сухомринов 及 Bohnenblust 与 Sobczyk 独立推广至复的情况（1938）．

§5．共轭空间与共轭算子

定义于线性赋范空间 X 的一切连续线性泛函按定义 4.3 形成一Banach 空间（定理 4.2）．这一空间记作$\overline{X}$并称作 X 的共轭空间．匈牙利数学家 F．Riesz 求出了各种空间的共轭空间，例如 $L^p_{[0,1]}$ 的共轭空间$\overline{L^p_{[0,1]}}=L^q_{[0,1]}$等等，其中 p,q 是一对满足条件$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 的共轭数．特别 $p=2$ 时 $q=2$，即 L^2 空间是自共轭的．

现在考虑映线性赋范空间 X 入另一线性赋范空间 Y 的线性算子 T，并设$\overline{X}$，$\overline{Y}$ 是共轭空间，对任意 $f\in\overline{Y}$ 可按下式定义$\overline{X}$ 中一点 f^*．

(1) X 的子空间乃指其闭的线性子集．

$$f^*(x)=f(Tx),\quad x\in X.$$

由 T 诱导出$\overline{Y}\to\overline{X}$的一个线性算子 T^*叫 T 的共轭算子，并由 Hahn—Banach 定理可证下列

定理 5.1. 设 T 是由线性赋范空间 X 到 Y 内的有界线性算子，则 T^*也有界，且$\|T^*\|=\|T\|$.

证，先证$\|T^*\|\leqslant\|T\|$，由定义 4.2 及该定义后的说明，只须证明$\|f_0\|=1$时$\|f_0^*\|\leqslant\|T\|$（注意 $f_0^*=T^*f_0$）. 实际上这由下式立得（注意 $f^*{}_0(x)=f_0(T)$）

$$\|f^*{}_0\|=\operatorname*{Sup}_{\|x\|=1}|f^*{}_0(x)|=\operatorname*{Sup}_{\|x\|=1}|f_0(Tx)|\leqslant\|f_0\|\operatorname*{Sup}_{\|x\|=1}\|Tx\|\leqslant$$

$\|T\|$.

次证$\|T\|\leqslant\|T^*\|$，只须证明$\|x_0\|=1$时$\|Tx_0\|\leqslant\|T^*\|$（以下要注意$\|f_0\|=1$时$\|f_0^*\|\leqslant\|T^*\|$），由 Hahn—Banach 定理. 存在泛函 f_0：$\|f_0\|=1$，且 $f_0(Tx_0)=\|Tx_0\|$，于是

$$\|Tx_0\|=f_0(Tx_0)=f_0^*(x_0)\leqslant\operatorname*{Sup}_{\|x\|\leqslant 1}|f_0^*(x)|=\|f_0^*\|\leqslant\|T^*\|$$

〈证毕〉

三、Banach 空间上有界线性算子

§6. Banach 的逆算子定理，闭图象定理及共鸣定理是 Banach 空间中另一组（与上述 Banach—Hahn 定理相比）基本重要定理，这里只提出逆算子定理，且不证明，证明时要利用完备空间的“纲性质”（参看南大《泛函分析》第三章定理 1.1）.

定理 6.1. （Bancah）. 假设有界线性算子 T 将 Banach 空间 X 一对一映象于 Banach 空间 Y 之上，则逆算子 T^{-1} 也是有界线性算子（$Y\to X$ 上）.

§7. 全连续算子及算子方程的 Riesz—Szauder 理论。

本节主要目的在于介绍全连续算子的 Riesz—Szauder 理论，它可以看作古典 Fredholm 定理的推广，首先介绍全连续算子概念。

定义 7.1. 定义在线性赋范空间 X 上且值域含于线性赋范空间 Y 内的线性算子 T 叫作全连续的，是指它把 X 中每一有界集都映射成 Y 中列紧集。(1)

这里不叙述全连续算子的一般性质（仅只不加证明的指出：全连续算子 A 一定是有界算子；设 A 是全连续算子而 B 是有界算子，则 AB 及 BA 均是全连续算子；全连续算子 A 的共轭算子 A^* 也是全连续算子等等），这里集中力量研究形如

$$Tx-\lambda x=y$$

的方程，其中 λ 是（实）数量且 $\lambda\neq 0$，T 是映空间 X 于自身内的全连续算子。

在这之前还须作几点准备工作

定义 7.1（点到子集的距离）。设 E 是线性赋范空间 X 的子集，．x_0是 X 中任一点，则x_0 到 E 的距离为 $\rho(x_0,\ E)=\inf\limits_{z\in E}\|x_0-z\|$。

若 $x_0\in E$，则显然有 $\rho(x_0,\ E)=0$。

引理 7.1 符号同上，且 E 是线性子集 则

(i) $\rho(x_0+\alpha z,\ E)=\rho(x_0,\ E)$，其中$z\in E$。

(ii) $\rho(\alpha x_0,\ E)=|\alpha|\rho(x_0,\ E)$。

(1) 所谓 $B\subseteq Y$ 是 Y 列紧集乃指 B 中任意无限点列均有收敛(于Y中某点）的子列。

证明是直接的，例如 (ii) 可按下式推证：

$$\rho(\alpha x_0, z) = \inf_{z\in E}\| \alpha x_0 - z\| = \inf_{z\in E}|\alpha|\left\| x_0 - \frac{z}{\alpha}\right\|$$

$$= |\alpha| \inf_{z\in E}\left\| x_0 - \frac{z}{\alpha}\right\|$$

$$= |\alpha| \inf_{z\in E}\| x_0 - z'\| = |\alpha|\cdot \rho(x_0, E).$$

其中应用了E的线性：$z\in E$时$\frac{z}{\alpha}\in E$，(以上曾假定$\alpha\neq 0$，因$\alpha=0$时引理明显成立)。

(i) 的证明类似。〈证毕〉

推论 1. X，E 符号同上，且设 E 是 X 的真子空间，则必存有 $x_1\in X$，满足

(i) $\|x_1\|=1$；

及

(ii) $\rho(x_1, E)\geqslant a$，其中 a 是任一事先给定的正数 $a<1$.

证. 任取 $x_0\in X-E$，则 $\rho(x_0, E)=d>0$，于是必存在 $z_0\in E$ 使$\|x_0-z_0\|<d+\varepsilon$($\varepsilon$ 任意给定的正数)．由引理知

$$\rho(x_0-z_0, E)=\rho(x_0, E)=d \text{ 及}$$

$$\rho\left(\frac{x_0-z_0}{\|x_0-z_0\|}, E\right)=\frac{1}{\|x_0-z_0\|}\rho(x_0, E)$$

$=\frac{d}{\|x_0-z_0\|}>\frac{d}{d+\varepsilon}$，取 ε 充分小可使$\frac{d}{d+\varepsilon}>a$，再取 $x_1=\frac{x_0-z_0}{\|x_0-z_0\|}$，则 x_1 即是满足推论要求之点．〈证毕〉

X 称作是有限维的，乃指存在一组有限基底：即存在X的有限个元 x_1，x_2，$\cdots$，x_n，任意$x\in X$均是线性组合形状 $\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n$.

由推论 1 显然又得

推论 2. X 中任一有界集是列紧的充要条件是 X 为有限维的

证，充分性与古典分析中 n 维欧氏空间情况的定理证明完全类同，仅证必要性如次．

反证法，设 X 不是有限维的，依推论 1 将可选一点列：x_1，x_2，…，x_n，…满足条件 (i) $\|x_n\|=1$； (ii) $\rho(x_m, x_n)>a$ $(m\neq n)$，由 (i) $\{x_n\}$是有界的；依 (ii) $\{x_n\}$ 不得为收敛列，这是矛盾．

〈证毕〉

在算子方程 $Tx-\lambda x=y$ 中取 $x'=\lambda x$ 并取 $T'=\frac{1}{\lambda}T$，立即看出它转化为 $T'x'-x'=y$．因此下边定理中仅讨论形 $Tx-x=y$ 的算子方程是无损于一般性的（其中 T 是全连续算子，它映 X 于自身之中）．

引理 7.2. 设 $y_n=Tx_n-x_n$，$\{x_n\}$是有界点列，且 $y_n\to y_0$ 则$\{x_n\}$中必有收敛子例$\{x_{n_k}\}$，（其中 T 是映 X于自身中的全连续算子）．

证明是明显的：由于$\{x_n\}$有界及 T 的全连续性，知有 n_1，n_2，…，n_k 使 Tx_{n_k} 是收敛列，于是 $x_{n_k}=Tx_{n_k}-y_{n_k}$ 也是收敛列．

引理 7.3. T 的意义同上，$y_n=Tx_n-x_n$，且$\{y_n\}$是有界点列，则存在有界点列$\{x_n^*\}$使$y_n=Tx_n^*-x_n^*$，$(n=1,2,\cdots)$．

证．设满足 $Tx-x=\theta$ 的所有 x 之集为 E,则易证 E 必是 X 的子空间（闭线性），但这点以下证明中并不用，对每个x_n 可取 x'_n 使满足$\|x_n-x'_n\|\geqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)\rho(x_n, E)$，$x_n'\in E$ 取 $x^*_n=x_n-x'$，以下证明 x_n^*即满足引理条件．

由 $x'_n \in E$，知 $Tx^*_n - x^*_n = Tx_n - x_n = y_n$，于是只须证明 x^*_n有界就行了。用反证法，设 x^*_n 无界则考虑 $z_n = \dfrac{x^*_n}{\|x^*_n\|}$，不失一般性可以认为$\|x^*_n\| \to \infty$（必要时可考虑$\{y_n\}$的一个子列代替$\{y_n\}$），于是$\{z_n\}$将有下列诸性质：

(i) $Tz_D - z_n = \dfrac{1}{\|x_n^*\|}(Tx^*_n - x_n^*) = \dfrac{1}{\|x_n^*\|} y_n \longrightarrow \theta$。

(ii) 由$\|z_n\| = 1$，从引理 7.2 故必有子列$\{z_{n_k}\}$：$z_{n_k} \to z_n$。于是 $Tz_0 = z_0$（(i) 及 T 的连续性）。$z_0 \in E$。

(iii) 由引理 7.1：$\rho(z, E) = \dfrac{1}{\|x_n^*\|}\rho(x_n^*, E) \geq \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}$

上述性质中的 (ii) 说明 z_{n_k} 向 E 的某点 z_0 收敛，而(iii)又说明$\{z_n\}$与 z 的距离始终$\geq \dfrac{1}{2}$。这是矛盾。因此$\{x_n^*\}$必是有界点列。（证毕）

推论 1. X 中所有形为 $y = Tx - x$ $(x \in X)$ 的元素 y 总体 E 是 X 的子空间。

显然只须证明 E 是闭集就行了。设 $y_n \in E$，$y_n \to y_0$。由引理 7.3 存在有界点列$\{x_n\}$使 $y_n = Tx_n - x_n$。由引理 7.2 $\{x_n\}$中又含有收敛子列$\{x_{n_k}\}$：$x_{n_k} \to x_0$，那么 $Tx_0 - x_0 = \lim\limits_{k\to\infty}(Tx_{n_k} - x_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = y_0$，即 $y_0 \in E$。（式中极限是在范数意义下的），因此 E 是闭的。

现在讨论算子方程问题：

定理 7.1. 设 T 是映 X 于自身的全连续线性算子，且方程 $Tx - x = y$ 对所有 $y \in X$ 均有解，则解是唯一的。

证，只须证明 $Tx - x = \theta$ 只有零解 $x = \theta$。用反证法。设

$Tx-x=\theta$ 有非零解，定义算子 $S=T-I$（I 是恒等算子），于是所有满足 $Sx=\theta$ 的 x 形成 X 的线性子空间 E_1，且 E_1 至少有一非零元素．一般记 $S^n=\underbrace{S\cdot S\cdots S}_{n\text{个}}$，并设 E_n 是由所有使 $S^nx=\theta$ 的 x 形成的子空间．于是：

(i) 由 $S^2x=S(Sx)$，$Tx-x=y$ 的可解性及反证法中所作之假定知[1] $E_2\supset E_1$ 但 $E_2\neq E_1$．同理知，$m>n$ 时 $E_m\supset E_n$ 且 $E_m\neq E_n$．因此，$E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots$

(ii) $Sx_n\in E_{n-1}$（其中 $x_n\in E_n$）．

(iii) 根据引理 7.1 之推论 1 及（i）便有点列 $\{x_n\}$ 满足下述条件：

(a) $x_n\in E_n$；

(b) $\|x_n\|=1$；

(c) $\rho(x_n,\ E_{n-1})>\frac{1}{2}$．因而 $m\neq n$ 时

$$\rho(x_n,\ x_m)>\frac{1}{2}.$$

注意到 $Tx_n=Sx_n+x_n$，由 (ii) 及 (iii) 之 (c) 知 $m>n$ 时 $\rho(Tx_m,\ Tx_n)=\|Tx_m-Tx_n\|=\|x_m+Sx_m-Sx_n-x_n)\|>\frac{1}{2}$．因而 $\{Tx_n\}$ 不得包含任何收敛子列．然而另一方面．由 T 的全连续性及 (iii) 的 (b)，$\{Tx_n\}$ 又应包含收敛子列．这是矛盾．因此 $Tx-x=\theta$ 只有解 $x=\theta$．〈证毕〉

前曾提及，全连续算子 T 的共轭算子 T^* 也是全连续的．于是同上可证对偶的．

定理 7.1* 若 T 的意义同上，且设方程

(1) 任取 $x_1\neq\theta$，$Sx_1=\theta$，次取 x_2 使 $Sx_2=x_1$，则 $x_2\in E_2$ 而 $x_2\notin E_1$．这个包含列中前者是后者的真子空间．

$$T^{*}f-f=h$$

对任意 $h\in\overline{X}$（X 的共轭空间）均可解，则解是唯一的。

证明同定理 7.1，从略。

以下转入上述定理之逆定理。为此先有

定理 7.2 方程 $Tx-x=y_0$ 可解的充要条件是：对方程 $T^{*}f-f=\theta$ 的每个解 f 有 $f(y_0)=0$。

证．必要性．设 f_0 为 $T^{*}f-f=\theta$ 的解，于是 $f_0(Tx-x)\equiv 0$．从而 $f_0(y_0)=0$。

充分性．用反证法，设 $Tx-x=y_0$ 不可解，即对 $x\in X$ 恒有 $Tx-x\neq y_0$．根据引理 3 推论 1 一切形为 $y=Tx-x$ 之元 y 形成 X 的子空间 E 而 $y_0\overline{\in}E$．于是 $E_1=\{y: y=y_1+ty_0, y_1\in E\}$ 将仍是 X 的子空间．今于 E_1 上定义连续线性泛函 f^{*}_0 为：$f^{*}_0(y)=t$，其中 $y=y_1+ty_0$，$y_1\in E$，根据 Hahn－Banach 定理便知有 X 上的泛函 f_0 满足条件：$f_0(y)=0$，$f_0(y_0)=1$，其中 $y\in E$．因此，$f_0(Tx-x)\equiv 0$ 于是 f_0 满足 $T^{*}f_0-f_0=\theta$，然而 $f_0(y_0)\neq 0$，这与假定矛盾．〈证毕〉

定理 7.2* 方程 $T^{*}f-f=h_0$ 可解的充要条件是对方程 $Tx-x=\theta$ 的一切解 x 有 $h_0(x)=0$。

证．必要性．设 $T^{*}f_0-f_0=h_0$，于是 $f_0(Tx-x)\equiv h_0(x)$．故当 $Tx-x=\theta$ 时 $h_0(x)=f_0(\theta)=0$。

充分性．由形为 $y=Tx-x$ 的一切元 y 组成子空间 E（引理 7.3 推论 1）．按题设条件，可由下式定义 E 上的泛函 f'_0：$f'_0(y)=h(x)$．f'_0 的线性甚为明显．它的连续性可这样证明：$y_n=Tx_n-x_n$ 且 $y_n\to y_0$ 时，按引理 7.3，不妨设 $\{x_n\}$ 是有界列．再据引理 7.2 $\{x_n\}$ 中还有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$：$x_{n_k}\to x_0$，$y_0=Tx_0-x_0$．此时 $h(x_{n_k})\to h(x_0)$，$f'_0(y_{n_k})\to f_0(y_0)$．

上边证明了对任意$\{y_n\}$，只要$y_n\to y_0$就必有$\{y_n\}$的子列：$f'_0(y_{n_k})\to f'_0(y_0)$，这就不难看出$y_n\to y_0$时$f'_0(y_n)\to f'_0(y_0)$．设$f_0$是$f'_0$向整个空间$X$上的延拓．于是$f_0(Tx-x)=h(x)$，$T^*f_0-f_0=h$．即$f_0$是所要之解．〈证毕〉

定理 7.3. （二者择一定理）设T是映X于自身中之全连续算子，则下列二种情况中有一且仅有一种情况发生：

(i) 方程 $Tx-x=y$ 对一切 y 可解．

(ii) 方程 $Tx-x=\theta$ 有非零解 x．

这个定理是以上诸定理的总结，设 (i) 成立，则据定理 7.1 (ii) 便不成立；反之设 (ii) 不成立，则按定理 7.2* 知 $T^*f-f=h$ 对任意 h 均可解，又从定理7.1*，方程 $T^*f-f=\theta$ 便只有解 $f=\theta$，最后从定理 7.2 便知 $Tx-x=y$ 对一切 y 都有解，因此 (i) 成立．

四、非线性泛函，隐函数存在定理

§8．Frechet 导数

定义 8.1. 设 $F(x)$ 是映 Banach 空间X于另一Banach 空间Y的算子（不一定是线性算子）．设 $x_0\in X$ 非孤立点，所谓一个映X于Y的连续线性算子 $F'(x_0)$ 是$F(x)$于 x_0 的 Frechet 导数，乃指 $R(x_0,v)=F(x_0+v)-F(x_0)-F'(x_0)v$ 时，满足条件 $\lim\limits_{\|v\|_X\to 0}\dfrac{\|R(x_0,\ v)\|_Y}{\|v\|_X}=0$．

于是，线性算子的导数即其自身．也可考虑高阶导数等等，从略．

定义 8.2. 若算子$F(\lambda)$映复（实）数 $C(R)$ 于 Banach 空间Y．所谓 $F(\lambda)$ 于 λ_0 处解析乃指在λ_0 的某一 δ 邻域内 ($\delta>$

0），$F(\lambda)$可表成下式：

$$F(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}F_k(\lambda-\lambda_0)^k,\quad F_k\in Y.$$

式中无限和理解为部分和（范数意义下）的极限。

关于 Frechet 导数有下列公式

定理 8.1. 设 F 是由 Banach 空间 B_1 映入 Banach 空间 B_2 的一般算子，Ωx_0 是以 $x_0(\in B_1)$ 为中心的一球，F 于 Ωx_0 上处处有 Frechet 导数 $F'(x)$. 那么：

$$F(v)-F(u)=\int_0^1 F'(u+t(v-u))(v-u)dt$$

上式中定积分意义仍与古典分析同：分细、作和、取极限。（何时右端积分存在，又积分的推广均可参看关肇直著《泛函分析讲义》第二章§6）。

证. 注意到式中两端均是 B_2 的点. 按 Hahn——Banach 定理，只须证明对共轭空间 B_2 的任一点 φ 下式均成立就行了：

$$\langle F(v)-F(u),\ \varphi\rangle=\langle\int_0^1 F'(u+t(v-u))(v-u)dt,\ \varphi\rangle$$

式中 $\langle x,\varphi\rangle$ 是 $\varphi(x)$的另一写法：$\langle x,\varphi\rangle=\varphi(x)$.

为此，考虑自变量 t 的实函数 $\eta(t)=\langle F(u+t(v-u)),\varphi\rangle$. 这里 φ 是任意但固定的. 由 φ 的连续性知：

$$\eta'(t)=\lim_{\tau\to t}\langle\frac{F(u+\tau(v-u))-F(u+t(v-u))}{\tau-t},\ \varphi\rangle$$

$$=\langle F'(u+t(v-u))(v-u),\ \varphi\rangle$$

利用微积分基本定理（Newton－Leibnitz 公式）：

$$\eta(1)-\eta(0)=\int_0^1\eta'(t)dt$$ 因此得：

$$\langle F(v)-F(u),\ \varphi\rangle = \langle\int_0^1 F'(u+t(v-u)(v-u)dt,\varphi\rangle$$

这里再次用到 φ 的连续性。 〈证毕〉

推论. 若 $F'(x)$ 恒满足 $\|F'(x)\|\leqslant\alpha<1$，则有 $\|F(v)-F(u)\|\leqslant\alpha\|v-u\|$ 即 $F(u)$ 是压缩映象。

证明与古典分析中类似的定理完全同。这里要注意在一般情况下对不同的 x，$F'(x)$ 代表不同算子，上述条件是说每一这样算子均有 $\|F'(x)\|\leqslant\alpha$。

定理 8.2. （隐函数定理）。设在原点 $(0,\ \theta)\in R\times B_1$ 某邻域 Ω 中，算子 $F(\lambda,\ x)$ ：$R\times B_1\to B_2$ 关于 $(\lambda,\ x)$ 有连续的 Frechet 导数，并设：

(i) $F(o,\ \theta)=\theta$,

(ii) $F'x(o,\ \theta)$ 具有从 B_2 到 B_1 的有界逆算子 Γ：

$$\Gamma\cdot F'x(o,\ \theta)=I \qquad (B_1\to B_1)$$

$$\Gamma'x(o,\ \theta)\cdot\Gamma=I \qquad (B_2\to B_2)$$

则有点 o 的邻域 G，及函数 $x(\lambda)$：$R\to B_1$，满足下诸条件：

(i) $x(o)=0$

(ii) $F(\lambda,\ x(\lambda))\equiv 0 \qquad \forall\lambda\in G$

(iii) $x'(\lambda)$ 存在且连续， $\forall\lambda\in G$

这里应注意我们以同一符号 θ 代表不同空间的零元（尽管它们不同），为了简单又以同一符号 I 代表不同空间的恒等映射：$Ix\equiv x$. Frechet 导数的连续性是指 $|\mu|<\delta$, $\|\nu\|<\delta$ （δ 充分小）时 $\|F'_\lambda(\lambda+\mu,\ x+\nu-F'_\lambda(\lambda,\ x)\|<\varepsilon$ 及 $|F'_x(\lambda+\mu,\ x+\nu)-F'_x(\lambda,\ \nu)\|<\varepsilon$.

证　依次证明以下几点：

(a) 存在充分小的 $\delta>0$，只要 $|\lambda_0|<\delta$ 及 $\|x_0\|<\delta$ 时，F'_x

(λ_0, x_0)就有有界逆算子。

根据 Banach 逆算子定理 6.1，只须证算子 $F'_x(\lambda_0, x_0)$ 是一对一映于 B_2 上的。也即对 $\forall u \in B_2$，方程 $F'_x(\lambda_0, x_0)v = u$ 有唯一解 $v \in B_1$。为此，考虑方程 $A\xi = \xi - \Gamma \cdot F'_x(\lambda_0, x_0)\xi + \Gamma u$ 或与之全同的方程：

$$A\xi = -\Gamma(F'_x(\lambda_0, x_0) - F'_x(o, \theta))\xi + \Gamma u$$

容易看出，只要上方程 $(B_1 \to B_1)$ 有唯一不动点 v，就说明 $F'_x(\lambda_0, x_0)v = u$ 有唯一解 v。于是 (a) 的证明也就完成。按 Banach 的压缺映象原理，为了达此目的又只须证 A 是一个压缩算子。证明如下：

$$\|A\xi_1 - A\xi_2\| = \|\Gamma \cdot (F'_x(\lambda, x) - F'_x(o, \theta))(\xi_1 - \xi_2)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|\Gamma\| \cdot \|F'_x(\lambda, x) - \Gamma'_x(o, \theta)\| \cdot \|\xi_1 - \xi_2\|$$

因题设知 F'_x连续，于是必存在正数 δ_1，$|\lambda| < \delta_1$ 及$\|x\| < \delta_1$ 时 $\|A\xi_1 - A\xi_2\| < \alpha\|\xi_1 - \xi_2\|$ $(\alpha < 1)$。至此 (a) 证完。

(b) $\forall \lambda_0 \in G$，有且只有一点 $x(\lambda_0) \in B_1$，满足 $F(\lambda_0, x(\lambda_0)) = \theta$。

容易看出 $x(\lambda_0)$满足 $F(\lambda_0, x(\lambda_0)) = \theta$ 的充要条件是：$x(\lambda_0)$是算子方程

$$Q^{(\lambda_0)}(x) = Ix - \Gamma \cdot F(\lambda_0, x)$$

的不动点。因此，按压缩影象原理只须证 $Q^{(\lambda_0)}(x)$（当 λ_0 充分小时）是压缩映象即可.又据定理 8.1 之推论只须看 $Q^{(\lambda_0)}(x)$。（x 不同，后者代表不同算子）。这很容易：由$\|Q^{(\lambda_0)}(x)\| = \|I - \Gamma \cdot F'_x(\lambda_0, x)\|$设 $F'_x(\lambda_0, x) = F'(o, \theta) + R(\lambda_0, x)$时，便有$\|Q^{(\lambda_0)\prime}(x)\| = \|\Gamma \cdot R(\lambda_0, x)\| \leqslant \|\Gamma\| \cdot \|R(\lambda_0, x)\|$。最后由 F'_x 的连续性必存在正数 δ，使当$|\lambda_0| < \delta_2$ 及$\|x\| < \delta_2$ 时 $\|Q^{(\lambda_0)\prime}(x)\| \leqslant \alpha(\alpha < 1)$.于是 (b) 证完。可以证明$x(\lambda)$是连

续的。

最后证明：

(c) $x'(\lambda)$在λ充分小范围内存在且连续。

按 Frechet 导数，将$F(\lambda+h, x(\lambda+h))$展开为

$F(\lambda+h, x(\lambda+h)) = F(\lambda, x(\lambda)) + F_\lambda'(\lambda, x(\lambda))h + F'_x(\lambda, x(\lambda))[x(\lambda+h) - x(\lambda)] + R$。从(b)立得$|\lambda|<\delta_2(\delta_2>0)$时$x(\lambda+h) - x(\lambda) = -[F'_x(\lambda, x(\lambda))]^{-1}\cdot F'_\lambda(\lambda, x(\lambda))h - R'$，其中$R' = [F'_x(\lambda, x(\lambda))]^{-1}R$，而$\|R'\| = o(\|R\|) = o(|\lambda|)$。即$x'(\lambda) = -F'_x(\lambda, x(\lambda))]^{-1}\cdot F_\lambda'(\lambda, x(\lambda))$。显然$x'(\lambda)$还是连续的($\delta$充分小。此处又用到了$F'_x$的连续性)。

〈证毕〉

五、 Hilbert 空间

§9 定义 9.1. **（内积空间）**．设X是复（实）数域K上的线性空间。若对于X内任何一对元素x，y均按某一法则与一复（实）数(x, y)对应，并且：

(i) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$；

(ii) $(x, y) = \overline{(y, x)}$　（$\overline{\alpha}$表α的共轭复数）；

(iii) $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$；

(iv) $(x, x)\geqslant 0$，当且仅当$x=\theta$时$(x, x)=0$。

X此时即称作内积空间。(x, y)为x，y的内积。实数域情况(ii)显然是$(x, y) = (y, x)$。

在内积空间X上可引入范数$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$，此时便得到赋范线性空间，当然更是距离空间了。($\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$的证法如下：对任意$\lambda$按(i)—(iv)有$(x+\lambda y, x+\lambda y)\geqslant 0$，即

$(y,y)|\lambda|^2+\lambda(y,x)+\bar{\lambda}\overline{(x,y)}+(x,x)\geqslant 0$。再令 $\lambda=-\dfrac{(x,\ y)}{(y,\ y)}$

得 $|(x,\ y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$，最后便有 $(x+y,\ x+y)=(x,\ x)+(y,\ y)+(x,\ y)+(y,\ x)\leqslant(x,\ x)+(y,\ y)+2|(x,\ y)|=(\|x\|+\|y\|)^2$，因此 $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$）可分的内积空间便是 Hilbert 空间。下边介绍射影算子概念。

首先提出下列

引理9.1 对内积空间 U，下列公式成立：

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$$

这个引理可由内积公理直接加以验证，这里从略。反之：若一Banach 空间的范数满足上式，则其范数可由内积引出，不细证了。

定理 9.1.（直交分解）。设 M 是完备内积空间 U 的子空间，则对任意 $x\in U$，可作下列唯一分解：

$$x=x_0+z,\ x_0\in M,\ z\perp M,$$

式中 x_0 称为 x 在 M 上的射影：$x_0=P_Mx$，P 又叫射影算子。

（$z\perp M$ 的意思是对 $\forall y\in M$ 有 $(x,\ y)=0$）

证。先证上述分解的存在性。显然只须就 $\rho(x,\ M)>0$ 的情况证明即可。设 $\rho(x,\ M)=a$，于是存在点列$\{x_n\}$，$x_n\in M$ 且 $\rho(x,\ x_n)\longrightarrow a$。以下先证明$\{x_n\}$是基本列，由引理 9.1 易知

$$[\rho(x_m,\ x_n)]^2=\|x_m-x_n\|^2=\|x_m-x+x-x_n\|^2=2\|x-x_m\|^2+2\|x-x_n\|^2-4\left\|x-\frac{x_m+x_n}{2}\right\|^2.$$

再由 $x_n\in M$，$x_n\in M$ 及 M 是子空间：$\dfrac{x_m+x_n}{2}\in M$。

因此$\left\|x-\dfrac{x_m+x_n}{2}\right\|\geqslant a$。这样以来，当 m，$n\longrightarrow\infty$ 时，上式

左端$[\rho(x, x_n)]^2$不为负，而右端又不得为正，即必有$\rho(x, x_n)\longrightarrow 0$。因此$\{x_n\}$是基本列。今设$x_m\to x_0$。再令$z=x-x_0$，则$x=x_0+z$。以下证$z\perp M$：注意到$x_0\in M$及$\forall y\in M$时$\rho(x, x_0+\lambda y)\geqslant a$于是：

$$a^2\leqslant\|x-x_0-\lambda y\|^2=\|x-x_0\|^2-2Re[\lambda(x-x_0, y)]+$$
$$|\lambda|^2\|y\|^2=a^2-2Re[\lambda(x-x_0, y)]+|\lambda|^2\|y\|^2.$$

即是 $\quad 2Re[\lambda(x-x_0, y)]\leqslant|\lambda|^2\|y\|^2$

取λ为实数ε，让$\varepsilon\longrightarrow 0$看出$Re(x-x_0, y)=0$；

取λ为纯虚数$i\varepsilon$，让$\varepsilon\to 0$又看出$I_m(x-x_0, y)=0$。这就说明$(x-x_0, y)=0$，即$z\perp M$。分解存在性至此证完。

次证唯一性。显然只须对$x=\theta$的情况证明即可。若$\theta=x_0+z$且$x_0\perp z$，则$\|\theta\|^2=\|x_0+z\|^2=(x_0+z, x_0+z)=\|x_0\|^2+\|z\|^2=0$。故必$x_0=z=\theta$。〈证毕〉

对于射影显有：$\|P_Mx\|^2\leqslant\|x\|^2$，且等号成立仅当$x\in M$。

一个经常用的 Hilbert 空间例子即L^2，这里不细论了。一个有趣的定理是完备、内积空间内连续线性泛函的 Riesz 表现定理。

定理9.2 （Riesz表现定理）．定义在完备内积空间U上的每一个有界线性泛函$f(x)$都可表为如下形式$f(x)=(x,u)$，其中元素$u\in U$由泛函$f(x)$唯一确定，且有$\|f\|=\|u\|$。反之：对于任意的$u\in U$，由等式$f(x)=(x, u)$唯一地确定了U上一个线性泛函f，且$\|f\|=\|u\|$。

证．(a)．先在$f(x)=(x, u)$的情况下证明$\|f\|=\|u\|$：由定义9.1后面一段中曾证明的不等式$|(x, u)|\leqslant\|x\|\cdot\|u\|$。于是设$f(x)=(x, u)$时显有$|f(x)|\leqslant\|u\|\cdot\|x\|$，即$\|f\|\leqslant\|u\|$。又于$f(x)=(x, u)$中取$x=u$时，$|f(u)|=\|u\|\cdot\|u\|$。因此

$\|f\|=\|u\|$. 另外，$u\neq\theta$ 时 $f(x)\neq 0(f(u)=(u,u)>0)$ 也是明显的。

(*b*) 由上面一段论述，看出定理的后一半甚为明显。对于定理前一半也只须证明存在性如次：

设 $f(x)\neq 0$，由 $f(x)$ 的有界、线性推知下列 L 是 U 的真子空间

$$L=\{x:f(x)=0,\ x\in U\}.$$

由此及定理 9.1，存在 $x_0:x_0\perp L$. 不妨设 $\|x_0\|=1$. 再设 $f(x_0)=\alpha(\neq 0)$，于是 $\forall x$，若 $f(x)=\beta$ 则 x 对 L 的直交分解必是 $x=\frac{\beta}{\alpha}x_0+z$，$z\in L$，后一结论证明如下：

考虑 $x-\frac{\beta}{\alpha}x_0$，由于 $f\left(x-\frac{\beta}{\alpha}x_0\right)=f(x)-\frac{\beta}{\alpha}f(x_0)=\beta-\frac{\beta}{\alpha}\cdot\alpha=0$，故 $z=x-\frac{\beta}{\alpha}z_0\in L$. 因此 x 关于 L 的直交分解是 $x=\frac{\beta}{\alpha}x_0+z$，$z\in L$.

最后，取 $u=\bar{\alpha}x_0$，则 $(x,u)=\left(\frac{\beta}{\alpha}x_0+z,\ \bar{\alpha}x_0\right)=\frac{\beta}{\alpha}\cdot\alpha(x_0,x_0)+\alpha(z,x_0)=\beta=f(x)$ (利用了 $\|x_0\|=1$，$x_0\perp L$)。至此，定理全部证明完毕。

利用上述定理于 Hilbert 空间即得自共轭算子概念 $(Tx,y)=(x,Ty)$，在量子力学中大家都很熟悉了，不再细述。

下边再给 Banach 空间内隐函数定理一点补充，而不予证明。

六、两点补充

§10. 定理 10.1. 在隐函数定理中，若 λ 取复数，其它假设照旧，则解 $x(\lambda)$ 是解析的。

我们还将提出 Riesz—Szauder 理论的下一结果但不证明了：

定理 10.2. 设 T 是全连续算子 $(B\to B)$，则方程 $Tx-x=0$ 的解 x 所组成子空间的维数与方程 $T^*f-f=0$ 的解 f 所组成子空间的维数相等。

七、分支现象

这里以粘性不可压缩流体的 Navier—Stokes 方程为例，说明如何利用第一部分介绍的泛函分析最基础内容处理单本征值情况的分支现象，所提的一些技巧方面对更一般问题是有用的。

§11. 直交坐标系中 Navier - Stokes 方程是

$$\dot{u}_i-\triangle u_i+\frac{\partial p}{\partial x_i}+\lambda u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=f(x_i,\ t)\quad (i=1,2,3)\ (11.1)$$

不可压缩且无源条件是：

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0$$

式中 p 是流体压力，u_j 是速度分量，分别沿 x_1，x_2，x_3 轴，λ 是参量，f 是外力，$\dot{u}_i=\frac{du_i}{dt}$。此外对重复标号要求和。

若无（或不计）外力时，则定态方程是

$$\begin{cases}\triangle u_i=\frac{\partial p}{\partial x_i}+\lambda u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} & (i=1,\ 2,\ 3)\\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 & (11.2)\end{cases}$$

注意方程中的未知函数是 $u_i(i=1,\ 2,\ 3)$ 及 p。

若考虑有界区域 D，且设在 D 的边界 ∂D 上的边界条件取为

$$u_i|\partial_D=\Psi_i \tag{11.3}$$

则由无散度方程 $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0$ 得：

$$0=\int_D \frac{\partial u_i}{\partial x_i}dx=\int_{\partial D} u_i u_i d\sigma=\int_{\partial D}\Psi_i v_i d\sigma$$

式中(v_1, v_2, v_3)是边界的法问单位矢量，dx 是体积元，$d\sigma$ 是面积元。

Leray 用拓扑度方法证明了边值问题（11.2），（11.3）对任意 λ 至少有一解。这里要研究的是：假设对应于 λ。已有一解 (u_0, λ_0)研究 λ 接近 λ_0 时解 $u(\lambda)$ 的问题。

记 $u(\lambda)=u_0+v$, $\lambda=\lambda_0+\tau$，则由（11.1），（11.2）及（11.3）分别有

$$\triangle v=\nabla p-\nabla p_0+\tau u_0\nabla u_0+\lambda v\nabla v+(\lambda_0+\tau)(u_0\nabla u+ \\ +u\nabla u_0)。\tag{11.4}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=0 \tag{11.5}$$

$$v|\partial_D=0 \tag{11.6}$$

为着后边的讨论，必须引入下列的一些空间方能运用泛函分析的方法，以 Ω 表示具有光滑边界的三维空间区域，引入的 Hilbert 空间 L_2 是

$$L_2(\Omega)=\{u;\ u=(u_1, u_2, u_3),\ u_\lambda(x)\in L_2(\Omega)\}$$

并定义子空间

$$H_a=\{w: w\epsilon L_2(\Omega),\ 且对\ \forall\varphi\in C'(\Omega),\ \int_\Omega w\cdot \\ \cdot\nabla\varphi dx=0\}$$
（$C'(\Omega)$表示具有连续偏导数的函数类）。

P_a 是 $L_2(\Omega)$ 向子空间 H_a 的射影算子，由 H_a 中条件 $\forall\phi\in C'(\Omega)$，$\int_\Omega w\cdot\nabla\varphi dx=0$，特别取 $\varphi=P$ 时可见 $\forall w\in H_a$

也有$\int_\Omega w\cdot\nabla\varphi dx=0$，因此$\nabla p\perp H_a$，此即$p_a(\nabla P)=0$。
$\left((u,\ v)\text{按周知定义有}(u,\ v)=\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega u_iv_idx\right)$。

从方程（11.2）$P_a(\triangle u-\lambda u\cdot\nabla u)=0$引入线性算子$A=P_a\triangle$，并引进一些记号：

$$N(\xi,\ \eta)=P_a(\xi\cdot\nabla\eta) \tag{11.7}$$

$$M(u_0,\ v)=N(u_0,\ v)+N(v,\ u_0) \tag{11.8}$$

$$L_0v=Av-\lambda_0M(u_0,v) \tag{11.9}$$

由方程（11.4）（两端作用P_a后）不难得出

$$L_0v=\tau N(u_0,\ v_0)+\lambda N(v,\ v)+\tau M(u_0,\ v) \tag{11.10}$$

其中v满足条件（11.5）及（11.6）

§1，§2中曾引入空间$C_{k+a}(D)$，这里再引入Banach空间

$$C_{k+a,a}=\left\{u:\|u_i\|_{k+a}<\infty,\ u\in H_a,\ \text{且在}D\text{上}\ \operatorname{div}u\equiv\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0\right\}$$

本节目的在于证明：当L_0可逆时，则在$(u_0,\ \lambda_0)$点不出现分支。为此先从一些引理开始。

引11.1 设$f_i\in C_a$，而u_i及P是下列方程的解：

$$\begin{cases}\nabla u_i=\dfrac{\partial\rho}{\partial x_i}+f_i\\ \operatorname{div}u=0\\ u|\partial_D=0\end{cases} \tag{11-11}$$

则必存在常数C，使得：

$$\|u\|_{2+a}\leqslant C\|f\|_a,\ \|p\|_{1+a}\leqslant C\|f\|_a \tag{11.12}$$

其中数量函数p的模$\|p\|_{1+a}$见§3，而矢函数的模可取作

$\|u\|_{2+a} = \sum_{i=1}^{3} \|u_i\|_{2+a}$ 等等，以后同此。

引理 11.1 的证明是属于微分方程理论，这里从略。

引理 11.2 如果方程 $L_0\varphi = 0$ 没有满足边值条件 $\varphi|\partial_D = 0$ 的非零解，则 L_0 必可逆并有常数 C 合于：$\|L^{-1}u\|_{2+a} \leqslant C\|u\|_a$

证．由（11.12），若 u 是 $Au = f$ 的解，其中 $f \in C_{a,a}$ 则，据 Banach 的逆算子定理，A 必有有界逆 $A^{-1}: C_{a,a} \to C_{2+a,a}$（定理 6.1）

设 $L_0u = f$，将两端作用算子 A^{-1} 并据（11.9）L_0 的定义得

$$u - aA^{-1}M(u_0, v) = A^{-1}f \tag{11.13}$$

其中 $v|\partial_D = 0$ (11.14)

分别证明以下几点：

(a)．$A^{-1}M(u_0, \cdot)$ 是 $C_{2+a,a}$ 上线性全连续算子。

"线性"容易直接看出。以下证"全连续性"。

首先，上面已说明 A^{-1} 是有界算子，于是

$$\|A^{-1}M(u_0, v)\|_{2+a} \leqslant C_1\|M(u_0, v)\|_a \tag{11.15}$$

其次由（11.7），（11.8）及 §1 中范数定义不难看出

$$\|M(u_0, v)\|_a \leqslant C_2\|v\|_{1+a} \tag{11.16}$$

由（11.15）及（11.6）便有常数 C 合于

$$\|A^{-1}M(u_0, v)\|_{2+a} \leqslant C\|v\|_{1+a} \tag{11.17}$$

最后，由 $v \in C_{2+a}$，及 §1，§3 中范数 $\|\cdot\|_{2+a}$ 的第二个式子可以证明：按范数 $\|v\|_{2+a}$ 有界的任意点列 $\{v_n\}$ 中必含有按范数 $\|v\|_{1+a}$ 收敛的子列 $\{v_{nk}\}$：$v_{nk} \to v_0$（此地不证）。因此，由（11.17）式知

$\| A^{-1}M(u_0, v_{nk}) - A^{1}M(u_0, v_0) \|_{2+\alpha} = \| A^{-1}M(u_0 v_{nk} - v_0) \|_{2+\alpha}$
$\leqslant C \times \| v_{nk} - v_0 \|_{1+\alpha} \to 0$。即 $A^{-1}M(u_0, \cdot)$ 将有界集映成列紧集，至此（a）证完

（b）由二者择一定理 7.3 及（a），再由题设条件对任意 $f \in C_\alpha$，方程（11.13），（11.14）有唯一解 v，且 $\| v \|_{2+\alpha} \leqslant C_1 \cdot \| A^{-1}f \|_{2+\alpha} \leqslant C \| f \|_\alpha$。〈证毕〉

引理 11.3 $\| N(u, v) \|_\alpha \leqslant C \| u \|_\alpha \| v \|_{1+\alpha}$

容易直接验证。（从略）

现在可以提出本节的主要结果是：

定理 11.1 如果 L_0 可逆，则对充分小的 τ，方程(11.10)有关于 τ 解析的唯一解 $\nu(\nu \in C_{2+,\sigma})$。

证．将（11.10）两端作用 L_0^{-1} 便得

$$\nu - \tau L_0^{-1}N(u_0, u_0) - \lambda L_0^{-1}N(\nu, \nu) - \tau L_0^{-1}M(u_0, \nu) = 0. \tag{11.18}$$

由引理 11.2，11.3，得：

$\| L_0^{-1}N(u, u) \|_{2+\alpha} \leqslant C \| N(u, u) \|_\alpha \leqslant C \| u \|_\alpha \cdot \| u \|_{1+\alpha} \leqslant C \| u \|^2_{1+\alpha}$ 因此 $L_0^{-1}N(u,u)$ 便是空间 $C_{2+\sigma}$，σ 映射于自身的算子，易知其关于 u 有连续 Frechet 导数。将方程（11.18）看作 $F(\tau, \nu) = \theta$ 于是下列条件满足

(i) $F(o, \theta) = \theta$

(ii) $F'\nu(o, \theta) = I$ $F'\tau(o, \theta) = L_0^{-1}N(u_0, u_0)\tau$。

（这些条件容易直接验证）从隐函数定理（及定理 10.1），立得定理的证明。〈证毕〉

上述定理说明，当 L_0 可逆时，在 (u_0, λ_0) 不产生分歧点。

§12．现在讨论 L_0 不可逆的情况

这时，按引理 11.2，$L_0\varphi=\theta$ 有满足边条件 $\varphi|\partial_D=0$ 的非零解 φ_0，因此 0 将是算子 L_0 的一个本征值，我们这里仅就 0 是单重本征值的情况下进行讨论。再将 L_0 具体写出：$L_0=A-\lambda_0 M(u_0,\ \cdot)$（见 11.9），设 $(\lambda_0,\ u_0)$ 已满足（11.2）及（11.3），以下还要在 $(\lambda_0,\ u_0)$ 的邻域内研究（11.2），（11.3）. 注意到（11.2）的第一方程可写作（两端作用算子 $P\sigma$）

$$Au(\lambda)-\lambda N(u(\lambda),\ u(\lambda))=\theta \tag{12.1}$$

那么所谓分支现象即是下列问题：能否在 $(\lambda_0,\ u_0)$ 的邻域中找出方程的另一解族（注意：$u(\lambda)$ 当 λ 固定时，代表对应于此 λ 的方程的一个解，而 $u(\lambda_0)=u_0$）

若采用记号 $\nu(\lambda)=u(\lambda)+z$ 且由（12.1）与下式

$$A\nu(\lambda)-\lambda N(\nu(\lambda),\ \nu(\lambda))=\theta \tag{12.2}$$

相减可得

$$Az-\lambda M(u(\lambda),\ z)-\lambda N(z,\ z)=\theta \tag{12.3}$$

与（11.9）相对应，这里再采用记号

$$L(\lambda)=A-\lambda M(u(\lambda)\ \cdot) \tag{12.4}$$

（(11.9) 即 $L(\lambda_0)=L_0$）则由(12.3)，所求定解问题又可写作

$$\begin{cases} L(\lambda)z-\lambda N(z,\ z)=\theta \\ \operatorname{div} z=0 \\ z|\partial_D=0 \end{cases} \tag{12.5}$$

（参看（12.1）后圆括弧中的说明）所谓分支问题即是：（12.5）有无非零解族 $z(\lambda)$？

按一般物理问题的实际情况，不妨假定 $u(\lambda)$，$L(\lambda)$ 在 λ_0 充分小邻域内可展开作：

$$u(\lambda)=u(\lambda_0+\tau)=u_0+\tau u_1+\tau^2 u_2+\cdots\cdots$$

$$L(\lambda)=L(\lambda_0+\tau)=L_0+\tau L_1+\tau^2L_2+\cdots\cdots \quad (12.6)$$

设 $L(\lambda)$ 的本征值为 $\mu(\lambda)$，则 $\lambda=\lambda_0$ 时有零本征值，但认为 $\mu'(\lambda_0)\neq 0$。在上述这些条件之下展开如下讨论。

引理 12.1，若 0 是 L_0 在 $H\sigma$ 中之单重本征值，则 (i) $\exists\varphi_0\in H\sigma$ 使 $L_0\varphi_0=0$，$\varphi_0\in C_{2+\alpha,\alpha}$ (ii) $L^*{}_0$ 有且仅有一个线性独立的本征函数 $\varphi_0{}^*$；$L_0{}^*\varphi_0{}^*=0$，其中 $\varphi_0{}^*\in C_{2+\alpha,\alpha}$ 且 $(\varphi_0,\varphi_0{}^*)=1$ (iii) $Pu=(u,\ \varphi_0{}^*)\varphi_0$ 是到 L_0 的零空间的射影而 $Q=I-P$ 是到值空间的射影，也是 $C_{2+\alpha,\alpha}$ 上的有界射影；(iv) 存在有界算子 K：$C_{\alpha,\alpha}\to C_{2+\alpha,\alpha}$ 使得 $KL_0=Q$。

关于引理，须作几点说明，首先 $H\sigma$ 是 Hilbert 空间，根据定理 9.2，对其上任意有界线性泛函 $f(x)$，存在该空间之一点（记作 f^*）使 $f(x)=(x,\ f^*)$；设 T 是任意有界线性算子，T^* 是其共轭算子时，则 $f(Tx)=(Tx,f^*)$ 于是又有另一点（记作 T^*f^*）使 $f^*(x)=f(Tx)=(Tx,\ f^*)=(x,\ T^*f^*)$。因此 T^* 也可看作：$H\sigma\to H\sigma$。引理中 φ_0 相当于记号 x，而 φ^* 则相当于上述的记号 f^*。在这样说明之后，引理便不难由定理 9.2, 10.2 得到（详细推导从略）。

引理 12.2 $L(\lambda)$ 的本征值 $\mu(\lambda)$ 是 λ 的解析函数，且 $\mu'(\lambda_0)=(L_1\varphi_0,\ \varphi_0{}^*)$

证。我们只给出最后一结论的证明。

设 $\mu(\lambda)=\mu(\lambda_0+\tau)=\mu_1\tau+\mu_2\tau^2+\cdots\ (\because\mu(\lambda_0)=0)$，

$$(12.7)$$

因为 $L(\lambda)\varphi(\lambda)=\mu(\lambda)\varphi(\lambda)$，将(12.7)及(12.6)代入此式并比较 τ 的同幂系数便得

$$L_0\varphi_0+\tau(L_0\varphi_1+L_1\varphi_0)+\cdots=\mu_1\varphi_0\tau+\cdots$$

于是

$$L_0\varphi_1 + L_1\varphi_0 = \mu_1\varphi_0$$

据引理 12.1 之(ii)及$(L_0\varphi_1,\ \varphi_0^*) = (\varphi_1,\ L_0^*\varphi_0^*) = 0$ 即得证明。 〈证毕〉

注. 此引可采另一证法如下：

在 $L(\lambda)\varphi(\lambda) = \mu(\lambda)\varphi(\lambda)$ 中($\mu(\lambda_0) = 0$，$\lambda = \lambda_0 + \triangle\lambda$)代入(12.6)得

$L_0\varphi_0 + \Delta\lambda(L_0\varphi_1 + L_1\varphi_0) + o(\Delta\lambda)^2 = \Delta\mu\cdot\varphi_0 + o(\Delta\lambda)^2$ 此处$\Delta\mu = \mu(\lambda_0+\Delta\lambda) - \mu(\lambda_0) = \mu(\lambda_0+\Delta\lambda)$。再注意 $L_0\varphi_0 = 0$。上式两端除以$\Delta\lambda$，并取$\Delta\lambda\to 0$ 时的极限，即得：

$\mu'\varphi_0 = L_0\varphi_1 + L_1\varphi_0$ （μ'的存在由上等式恒成立可直接看出）即 $\mu' = (L_0\varphi_1 + L_1\varphi_0,\ \varphi_0^*)$。由此 $\mu(\lambda)$的解析性可由复变函数理论证得。 〈证毕〉

在进入本节主要定理之前，还将引入一个记号：

$$[u] = (u,\ \varphi_0^*)$$

于是：(1) $\mu'(\lambda_0) = [L_1\varphi_0]$，由假定$[L_1\varphi_0] \neq 0$

(2) $[\varphi_0] = 1$

(3) $Pu = (u,\ \varphi_0^*)\varphi_0 = [u]\varphi_0$

(4) f 属于 L_0 的值域$\Longleftrightarrow [f] = (f,\ \varphi_0^*) = 0$

(5) $\forall u$，$[Qu] = 0$ 等等。

定理 12.1 当$[L_1\varphi_0] \neq 0$ (即 0 是 L_0 的单重本征值)时，方程 (12.5) 有非本平凡分支 $(\lambda(\varepsilon),\ z(\varepsilon))$，其中 $\lambda(0) = \lambda_0$而$z(0) = \theta$，且当$|\varepsilon|$充分小时，$\lambda(\varepsilon)$，$z(\varepsilon)$ 均解析，并且 $[z(\varepsilon)] = (z(\varepsilon),\ \varphi_0^*) = \varepsilon$。

证. 对方程(12.5)再作变换 $z = \varepsilon W$，$\tau = \varepsilon\sigma$ ($\lambda = \lambda_0 + \tau$)，使$[W] = 1$，于是显然有 $[z] = \varepsilon$ 并有 $PW = \varphi_0$，$W = PW + QW = \varphi_0 + \xi$. 方程 (12.5) 第一式变为

$$L_0W+\varepsilon\sigma L_1W+\cdots-\varepsilon(\lambda_0+\varepsilon\sigma)N(W,\ W)=0$$

将 $W=\varphi_0+\xi$ 代入后得

$$L_0\xi+\varepsilon(\sigma L_1(\varphi_0+\xi)+\cdots-(\lambda_0+\varepsilon\sigma)N(W,\ W))=0 \tag{12.7}$$

注意 $L_0\xi$ 属于 L_0 的值域及前边提及性质（4），由上方程又得

$$\sigma[L_1\varphi_0]+\sigma[L_1\xi]+\cdots-(\lambda_0+\varepsilon\sigma)[N(\varphi_0+\xi,\ \varphi_0+\xi)]=0 \tag{12.8}$$

另一方面若将（12.7）两端作用 L_0 的“逆” K（引理 12.1 的（iv）），并由 $KL_0\xi=Q\xi=\xi$ 得

$$\xi+\varepsilon K\xi\sigma L_1(\varphi_0+\xi)+\cdots-(\lambda_0+\varepsilon\sigma)N(\varphi_0+\xi,\varphi_0+\xi)\xi=0 \tag{12.9}$$

引入 $C_{2+\alpha,\alpha}$ 的子空间

$$B_1=\{\xi:\ \xi\in C_{2+\alpha,\alpha},\ [\xi]=0\}$$

于是边值问题（12.5）即等价于问题：有无参数 σ，ε 及 $\xi\in B_1$ 使之满足（12.8）及（12.9）？

定义一个算子 F：

$$F(\xi,\sigma,\varepsilon)=(\xi+\varepsilon K\{\sigma L_1(\varphi_0+\xi)+\cdots\},[\sigma L_1(\varphi_0+\xi)+\cdots])$$

F 显然是：$B_1\times R\times R\to B_1\times R$

由于要解的问题即是将 ξ,σ 从 $F=\theta$ 中解出为 ε 的函数，若记 $B=B_1\times R$，又当 $(\xi,\ r)\in B$ 时范数定义为 $\|(\xi,\ r)\|_B=\|\xi\|_{B_1}+|r|$。如此 F 就可看作：$B\times R\to B$，我们要对它运用隐函数定理 8.2. $F(\eta,\varepsilon)$ 具有连续 Frechet 导数（$\eta=(\xi,\ \sigma)$）是容易直接看出的。再看 $\varepsilon=0$ 时 η_0 是否存在。此时 $F(\eta,\ 0)=\theta$ 即成为：

$$F(\eta,\ 0)=(\xi,\ \sigma[L_1(\varphi_0+\xi)-\lambda_0N(\varphi_0+\xi,\ \varphi_0+\xi)])=\theta$$

于是可取 $\eta_0 = (\theta, \sigma_0)$ 其中

$$\sigma_0 = \frac{\lambda_0}{[L_l\varphi_0]}[N(\varphi_0, \varphi_0)]$$

于是 $F(\eta_0, 0) = \theta_0$

下边再考察一下 $F'x_0(\eta_0, 0)$，它可表作下列矩阵

$$F'\eta_0(\eta_0, 0) = \begin{pmatrix} I & \theta \\ \sigma_0[L_l \cdot] - \lambda_0[M(\varphi_0, \cdot)] & [L_l\varphi_0] \end{pmatrix}$$

它显然是有界可逆的。逆算子为：

$$r = \begin{pmatrix} I & \theta \\ \lambda_0[M(\varphi_0, \cdot) - \sigma_0[L_l \cdot] & [L_l\varphi_0]^{-1} \end{pmatrix}$$

于是从隐函数定理 8.2（及定理 10.2），即得定理之证明。

注，由$[(z(\varepsilon)] = \varepsilon$ 知 $\varepsilon \neq 0$（当然要充分小）时 $z(\varepsilon) \neq \theta_0$

INTRODUCTION TO FUNCTIONAL ANALYSIS AND BIFURCATION THEORY

Wang Shu-tang

Abstract.

This is an expository paper in which we introduce systematically some basic aspect of functional analysis with moderate length. From which the bifurcation theory is derived which may be useful for physicists.

广 义 数 及 其 应 用 (I)*

王 戌 堂

摘　要

本文在文献[2]的基础上引进广义数系统．定义了以广义数为基础的广义函数（本质不同于L. Schwartz的分布），研究了勒贝格积分的推广．将这理论应用于分布，便得到对δ函数等的自然理解．对广义数应用于量子场论中，也作了一些尝试性的工作．

在量子力学发展过程中，Dirac首先提出δ函数，开始仅是理解为一种特定的符号[1]．然而这类函数在近代物理及数学领域中，却日愈显示出其根本性的重要意义．1950年法国学者L. Schwartz提出了分布论则是把这类函数理解为基本空间

* 本文发表于《中国科学》数学专辑(I)(1979)pp·1—11．

的线性泛函，以此来奠定其数学基础．众所周知，基本空间是由具一定数学性质的普通实变函数组成．因此Schwartz的观点是一种简接以实数作为基础的观点：在这里函数关系被泛函所代替．

1964年作者[2]曾引用"ω_μ-列"解决拓扑空间的ω_μ-距离化问题．

设ω_μ为规则初始序数，并设

$$x=(x_0, x_1, \cdots, x_\alpha, \cdots)$$

及

$$y=(y_0, y_1, \cdots y_\alpha, \cdots), \qquad (1)$$

其中x_α, y_α均为实数，$\alpha<\omega_\mu$．当存在某个$\alpha_0<\omega_\mu$合于下列条件时，

$$\begin{cases}\beta<\alpha_0 \text{ 时}, \ x_\beta=y_\beta, \\ x_{\alpha_0}<y_{\alpha_0}, \end{cases} \qquad (2)$$

即$x<y$．文献［2］中曾定义x与y间的加减运算关系．

如记$I_{\alpha_0}=\{x;\ \beta\neq\alpha_0\text{时 } x_\beta=0\}$，于是容易看出$I_{\alpha_0}$是与普通实数同构的（对一切运算）．称$I_{\alpha_0}$为第$\alpha_0$数区，于是当$\alpha<\beta$时，$\alpha$数区的每个非零元素对$\beta$数区而言均是（正、负）无限大；$\beta$数区的每个元素对$\alpha$数区而言均是无限小．因此，这里便将无限分了等级：同一数区的数均与普通实数同构，不同数区的数则是"不可通约的"．

一、广义数的基本概念

这里研究下述形状的列：$x=(\cdots, x_{-m}, \cdots, x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots)$，$m$与$n$均为自然数，且只有有限个$m$，使$x_{-m}\neq 0$．定

义几种运算：

1）序及加减运算（见文献[2]）；

2）设 c 为实数，则定义 $cx=(\cdots,cx_{-m},\cdots,cx_0,\cdots,cx_n,\cdots)$；引用符号（$k$ 数区的单位元）$l_{(k)}$：

$$l_{(k)}=(\cdots,0,\cdots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{第}k\text{位}}}{1},0,\cdots),\tag{3}$$

其中 k 可正、可负也可以是数 0。于是

$$x=\sum_k x_k\times l_{(k)}.\tag{4}$$

3）定义乘法为：

$$l_{(m)}\times l_{(n)}=l_{(m+n)}\tag{5}$$

及

$$x\cdot y=\sum_k\sum_{m+n=k}(x_m\cdot y_n)\times l_{(k)}\tag{6}$$

（m,n 及 k 均是整数）。

4）除法定义。设 x,y 及 z 在上述 3）意义下有关系

$$y\cdot z=x,\tag{7}$$

即说 z 是 x 除以 y 的商，记作

$$z=\frac{x}{y}.\tag{8}$$

容易验证，在上述运算定义下，列 x 之集便是一个有序域，而有关实数的一些基本算术公式现在仍然成立。

广义数的定义。定义了上述运算的列 x 之集便称之为广义数系统，x 称作广义数。

每一数区 I_n（n 是整数）与实数具有相同构造，而不同数区间的关系则是无限大与无限小的关系。广义数系统是一有序域。

二、广义函数

不难给出以广义数为基础的函数定义，这完全与普通实变函数的定义方式相同，因此勿需重述。这样的函数，本文即称之为广义函数。

寻常所观察到的量只是普通实数，这相当于广义数的一个数区，恒约定是第0数区的数。因此，普通实变函数则是定义于I_0的某集合E，且于I_0取值的广义函数。下边讨论广义函数的连续性。

实际改变量．设 $x=\sum\limits_{n} x_n\times l_{(n)}$ 及 $x+\Delta x=\sum\limits_{n}(x+\Delta x)_n\times l_{(n)}$，又设$m$为一固定整数．如果当$n<m$时恒有$(x+\Delta x)_n=x_n$，即称$\Delta_m(x)=(x+\Delta x)_m-x_m$为$x$的实际($m$)改变量。以后凡出现符号$\Delta_n(x)$，$\Delta_n(y)$时，不加声明，均指这种意义下的实际改变量。

定义 1．设$y=f(x)$是定义于E的广义函数，$x_0\in E$而m与n为整数。如对任意的正实数$\varepsilon>0$均有相应的实数$\delta>0$，使之合于条件：$|\Delta_m(x_0)|<\delta$(及$x\in E$)时，

$$|\Delta_n(y_0)|<\varepsilon, \tag{9}$$

即称$f(x)$(关于E)于x_0是准(m,n)连续的，其中x_0是广义数。

若$m=n=0$，即得普通连续性概念；而当$n<m=0$时，说明即使函数取值(平常所说的)∞仍可考虑其某种连续性。

对于准(m,n)连续性有下列初等定理。

定理 1．在点x_0，如果$f_1(x)$与$f_2(x)$准(m,n)连续，则$f(x)=f_1(x)\pm f_2(x)$也准(m,n)连续。

定理 2. 在点 x_0，如果 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 各是准 (m,n_1) 与准 (m,n_2) 连续，那么 $f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$ 便是准 (m,n) 连续的。其中 $n=\min\{n_1+n_2,\ n_1+k_2,\ n_2+k_1\}$，而 k_i 是使 $\{f_i(x_0)\}_k\neq 0$ 的最小标号 $k=k_i$。

定理 3. 在点 x_0，设 $f(x)$ 准 (m,n) 连续，并设存在正实数 $\delta>0$，使当 $|\Delta_m(x)|<\delta$ 时，$\{f(x)\}_n\neq 0$，而 $\{f(x)\}_k=0$ $(k<n)$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 便是准 $(m,-n)$ 连续的。$\{f(x)\}_n$ 的意义为：$f(x)=\sum\limits_n\{f(x)\}_n\times I_{(n)}$。

定理的证明从略。

定义 2. 设 $y=f(x)$ 为定义于 E 的广义函数，$x_0\in E$。m，n，$\Delta_m(x)$ 与 $\Delta_n(y)$ 等符号意义同上。如果存在实数 S 合于条件：对任意实数 $\varepsilon>0$ 有实数 $\delta>0$，使当 $|\Delta_m(x_0)|<\delta$ 时，

$$\left|\frac{\Delta_n(y_0)}{\Delta_m(x_0)}-S\right|<\varepsilon. \tag{10}$$

即称 $S\times I_{(n-m)}$ 为 $y=f(x)$ 在点 x_0（相对于集 E）的 (m,n) 导数。

关于 (m,n) 导数一些初等性质的讨论在此从略。

三、广义函数的积分

不失一般性，可假定以下的函数 $y=f(x)$ 是定义于整个广义数系统上的，因为讨论积分时可于函数定义域外补值 0。记 $E=\{x;\ f(x)\neq 0\}$，我们分以下两种情况及若干步定义积分。

1. 设 $x\in E$ 时，$x_{-m}=0$ 恒成立，$m=0,1,2,\cdots$。

为叙述清楚起见，可将 $y=f(x)$ 明显表为：

$$y=(\cdots,y_{-m},\ \cdots,\ y_0,\ \cdots,\ y_n,\ \cdots), \tag{11}$$

其中 $y_k = y_k(x) = y_k[(\cdots, x_{-m}, \cdots, x_0, \cdots, x_n, \cdots)]$.

第一步. 记 $H^{(0)}$ 为满足下列条件 $(P)_0$ 的全部实数 x_0 之集：

$(P)_0$: 设 $x = (\cdots, 0, \cdots, 0, x_0, \cdots, x_n, \cdots)$ 及 $y = f(x) = (\cdots, y_{-m}, \cdots, y_0, \cdots, y_n, \cdots)$，则

$$(1)_0 \quad y_{-m} = 0; \quad m > 0.$$

$$(2)_0 \quad y_0 \text{ 仅与 } x_0 \text{ 有关 } y_0 = y_0(x_0). \qquad (12)_0$$

由 $f(x)$ 定义实变函数 $f^{(0)}(x_0)$ 为：

$$f^{(0)}(x_0) = \begin{cases} y_0, & \text{当 } x_0 \in H^{(0)}, \\ \infty \text{ 或不确定，其它.} \end{cases} \qquad (13)_0$$

如果 $f^{(0)}(x_0)$ 是勒贝格可积的（自然此时 $(13)_0$ 式右端第二种情况的 x_0 便是线性勒贝格测度为零的集合），积分值记作 $a^{(0)}$. 继续进行下列第二步.

第二步. 固定 x_0，并首先按下列条件定义实数 x_1 的集合 $H^{(1)}$：对 $x_1 \in H^{(1)}$ 恒有性质

$(P)_1$: 当 $x = (\cdots, 0, \cdots, 0, x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots)$ 时，

$$(1)_1 \quad y_{-n} = 0, \quad n > 1;$$

$$(2)_1 \quad y_{-1} \text{ 仅与 } x_1 \text{ 有关 } y_{-1} = y_{-1}(x_1). \qquad (12)_1$$

自然其中 $H^{(1)}$ 等则是随 x_0 改变的.

定义实变函数 $f^{(1)}_{(x_0)}(x_1)$ 为：

$$f^{(1)}_{(x_0)}(x_1) = \begin{cases} y_{-1}, & \text{当 } x_1 \in H^{(1)}, \\ \infty \text{ 或不确定，其它.} \end{cases} \qquad (13)_1$$

如果函数 $f^{(1)}_{(x_0)}(x_1)$ 是勒贝格可积的（自然由式 $(13)_1$ 右端第二种情况的 x_1 构成线勒贝格测度为零的集），积分值（显见依赖于 x_0）记作 $a^{(1)}(x_0)$，如果和数 $\sum_{x_0} a^{(1)}(x_0)$ 有意义（从而

至多只有可列个非零项），记此和为$a^{(1)}$。

一般说来，假设$a^{(0)}$，…，$a^{(n-1)}$均已求出为有限数。

第n步．首先固定x_0，x_1，…，x_{n-1}，记$H^{(n)}$为满足下列条件的实数x_n之集：$x_n \in H^{(n)}$，则下列条件成立

(P)$_n$：$x=(\cdots, 0, \cdots, 0, x_0, x_1, \cdots x_n, \cdots)$时，

$$(1)_n \ y_{-m}=0, \ m>n; \qquad (12)_n$$

$$(2)_n \ y_{-n}\text{仅依赖于}x_n \quad y_{-n}=y_{-n}(x_n),$$

其中$H^{(n)}$自然与$(x_0, \cdots, x_{n-1})$有关。

定义实变函数$f^{(n)}_{(x_0,\cdots,x_{n-1})}(x_n)$如下：

$$f^{(n)}_{(x_0,\cdots,x_{n-1})}(x_n)=\begin{cases} y_{-n}, & \text{当 } x_n\in H^{(n)}\text{时；} \\ \infty & \text{或不定，其它。}\end{cases} \qquad (13)_n$$

如果该实变函数勒贝格可积，积分值便记作为$a^{(n)}(x_0,\cdots,x_{n-1})$如和数$\sum\limits_{(x_0,\cdots x_{n-1})} a^{(n)}(x_0, \cdots, x_{n-1})$有意义，此和即以符号$a^{(n)}$记之。

定义 3．如上述$a^{(0)}$，…，$a^{(n)}$，…均存在且有限而且级数$\sum\limits_n a^{(n)}$收敛，和为a；$a=\sum\limits_n a^{(n)}$，便说广义函数$f(x)$是(GNL)可积的，即

$$(GNL) \int f(x)\,dx=a. \qquad (14)$$

2．在不满足上述条件1的情况下，首先将E作如下分解：

$$E=\sum_h E_h, \qquad (15)$$

其中

$$E_h=\{x; \ x\in E, \ x_{-h}\neq 0 \text{ 且 } n>h\text{ 时}, \ x_{-n}=0\}. \qquad (16)$$

积分定义过程仍分下述几步完成

第一步. 按上述第1小节的办法，首先定义广义函数 $f^{(0)}$:

$$f^{(0)}(x)=\begin{cases} f(x), & \text{当 } x\in E_0 \text{ 时}, \\ 0, & \text{对其它情况}. \end{cases} \tag{17}$$

设在上述第1小节的意义之下 $f^{(0)}(x)$ 是 (GNL) 可积的，积分值为 a_0.

第二步. 作集合 E_1^*:

$$E_1^*=E_1\times 1_{(1)}=\{x;\ x=x'\times 1_{(1)},\ \text{其中 } x'\in E_1\}. \tag{18}$$

于是 $x\in E_1^*$ 时，$x_{-n}=0$，其中 $n>0$. 定义广义函数 $f^{(1)}(x)$ 如下:

$$f^{(1)}(x)=\begin{cases} f(x\times 1_{(-1)})\times 1_{(-1)}, & x\in E_1^* \text{ 时}, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \tag{19}$$

这相当于，伴随于将 E_1 右移一位的 E_1^*，将原来函数 $f(x)$ 左移一位，于是得到 $f^{(1)}(x)$. 设 $f^{(1)}(x)$ 在上述第1节的意义下 (GNL) 可积，积分值记作 a_1.

用与上面类似的定义方法，假设 a_0, a_1, …, a_n, … 均已求出，为有限数，则有下列:

定义 4. 若级数 $\sum_n a_n$ 收敛，和为 a，则说广义函数是 (GNL) 可积的，仍用下式表示

$$(GNL)\int f(x)\,dx=a. \tag{20}$$

这里的积分值是只取实数. 而在量子力学中有更广义的积

分概念，如下公式所表示的那样[1]

$$\int\delta(a-x)\,dx\,\delta(x-b)=\delta(a-b) \tag{21}$$

由（21）式可见，左端积分绝不应是实数。另外，从纯数学观点看，既然已将实数扩充为广义数，将积分值也推广至一般广义数乃是自然的事情。以下所述的（G）积分则是把某种发散积分用广义数严格表达出来。为此，只须对前述定义加以适当修改就行。我们不准备详细罗列积分定义的全部过程，而是只指出其应修改之处。

1）$(12)_n$ 式可改为（$n=0, 1, 2, \cdots$）：

$$y_{-m}=y_{-m}(x_n),\ m>n; \tag{12}'$$

2）$(13)_n$式改为：

$$f^{(n)}_{(x_0,\cdots,x_{n-1})}(x_n)=\begin{cases}\sum\limits_{s\geq 0}[y_{-(n+s)}\times 1_{(-s)}], & \text{当 } x_n\in H_n,\ \text{而}\\ x_{a-1}\overline{\in}H^{(n-1)}\text{时}, & \\ \infty\text{或不确定，其它。}\end{cases} \tag{13}'_n$$

3）“$f^{(n)}_{(x_0,\cdots,x_{n-1})}(x_n)$是勒贝格可积的”应一律改作“对每个 $s\geq 0$，$y_{-(n+s)}(x_n)$是勒贝格可积的”。

4）将 3）中关于 $y_{-(n+s)}(x_n)$ 的勒贝格积分值记作 $a^{(n)}_{-s}(x_n, \cdots, x_{n-1})$，并将“$a^{(n)}(x_0, \cdots, x_{n-1})$”改作

$$“\sum_{s\geq 0}[a^{(n)}_{-s}(x_0,\ \cdots,\ x_{n-1})\times 1_{(-s)}]”.$$

5）将“$a^{(n)}=\sum\limits_{x_0,\cdots,x_{n-1}}a^{(n)}(x_0,\cdots,x_{n-1})$”换作“$a^{(n)}_{-s}=\sum\limits_{x_0,\cdots,x_{n-1}}a^{(n)}_{-s}(x_0,\ \cdots,\ x_{n-1})$；$s=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$”。

6）将定义 3 换作

定义 3′. 若对每个 $s\geqslant 0$，$a_{-s}^{(0)}$，$a_{-s}^{(1)}$，…，$a_{-s}^{(n)}$，…均存在且级数 $\sum_{n} a_{-s}^{(n)}$ 收敛，和数记为 a_{-s} 时只有有限个 s 使 $a_{-s}\neq 0$，则说 $f(x)$ 是(G)可积的，积分值为：

$$(G)\int f(x)\,dx=\sum_{s\geq 0}[a_{-s}\times 1_{-s}]. \qquad (14)'$$

7）定义 4 的修改过程与上述完全相类似（从略）.

显然有下列定理成立

定理 4. 若广义函数 $f(x)$ 是（GNL）可积的，则 $f(x)$ 必是（G）可积，而且有

$$(G)\int f(x)\,dx=(GNL)\int f(x)\,dx. \qquad (22)$$

另一方面，还可利用连续延拓的想法得下述定义

定义 5. 设 F 为某一（GNL）可积函数族，且设按某种方式定义了一种收敛关系：$f_n\to f$，其中 $f_n\in F$. 于是可定义 $(GNL)_F$ 积分如下：

1）当 $f\in F$，则取

$$(GNL)_F\int f(x)\,dx=(GNL)\int f(x)\,dx. \qquad (23)$$

2）设 $f\overline{\in}F$，且当 $f_n\to f(f_n\in F)$ 时下列极限恒存在且等于常数 a，则定义

$$(GNL)_F\int f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}(GNL)\int f_n(x)\,dx=a. \qquad (24)$$

四、对 Schwartz 分布的应用

1. 关于 Dirac 的 δ 函数

按照 Schwartz 的观点，把满足下列条件

$$
(D)\ :\ \begin{cases} 1)\ \delta(x)=0,\ x\neq 0\ 时, \\ 2)\ \delta(0)=\infty, \\ 3)\ 对任意具紧支集且无限可导的函数\ f(x)\ 有 \\ \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\,dx = f(0) \end{cases}
$$

的 δ 函数 $\delta(x)$ 理解为基本空间的线性泛函，泛函 $\widetilde{K}$ 由下式定义

$$
\widetilde{K}(f)=f(0)\ . \tag{25}
$$

因此，上述条件 (D) 中 3) 的积分号便仅具有象征性的意义了。从本文以下讨论明显看出，普通（一元）实变函数是其定义域及值域均限于 I_0 的函数；而 δ 函数则是以一般广义数系统为定义及取值范围的函数，从而使得对 δ 函数的理解更加自然而且清楚。为此，设 $f_0(x_0)$（注意此处脚标"0"表示取实数的意思）为普通（无限可导的）实变函数，我们将下式定义的广义函数 $f(x)$ 称为由 $f_0(x_0)$ 诱导的广义函数：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f_0(x_0) + f_0'(x_0)\times\left[\sum_{m=1}^{\infty} x_m \times 1_{(m)}\right] + \cdots + \frac{1}{n!}f_0^{(n)}(x_0) \\
&\quad \times\left[\sum_{m=1}^{\infty} x_m \times 1_{(m)}\right]^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f_0^{(n)}(x_0) \\
&\quad \left[\sum_{m=1}^{\infty} x_m \times 1_{(m)}\right]^n .
\end{aligned} \tag{26}
$$

于是下列定理成立

定理 5. $f_0(x_0)$ 及 $f(x)$ 的意义如上，则存在（并不唯一）广义函数 $g(x)$，$g(x)$ 是 (GNL) 可积的，且有

$$
(GNL)\ \int f(x)g(x)\,dx = f_0(x_0)\ (=f(x_0))\ . \tag{27}
$$

证．任取一个无限可导（甚至还可假定它是具紧支集）的实变函数 $g^*(x_\bullet)$，它满足条件：$\int_{-\infty}^{\infty} g^*(x_\bullet)dx_\bullet = 1$（注意：凡 x 带下脚标的，如 $x_\bullet$，x_1 等等均表示实变数的意思，因此 $x_\bullet$ 与 x_1 等将是通用的实变数的符号而无原则区别．此点今后将不再说明）．定义广义函数如下

$$g(x)=\begin{cases} g^*(x_1)\times 1_{(-1)}, & \text{当 } x=(\cdots,\ 0,\ \cdots,0,x_1,\ x_2,\ \cdots),\\ 0, & \text{对其它 } x. \end{cases} \tag{28}$$

于是 $f(x)g(x)$ 显然由下式给出

$$f(x)\cdot g(x)=\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)g^*(x_1)\left(\sum_{m=1}^{\infty}x_m\times 1_{(m)}\right)^n\right] \\ \times 1_{(-1)} \\ \qquad x=(\cdots,0,\cdots,0,x_1,x_2,\cdots) \text{ 时}, \\ 0, \text{ 对其它的 } x. \end{cases} \tag{29}$$

注意到 $\{f(x)\cdot g(x)\}_{-n}=0,\ n>1$；及 $x_{-n}=0,\ n=0,1,2,\cdots$ 及关系 $\int_{-\infty}^{\infty} g^*(x_1)dx_1=1$．于是

$$(GNL)\int f(x)g(x)=(L)\int f(0)g^*(x_1)dx_1$$

$$=f(0)\int_{-\infty}^{\infty} g^*(x_1)dx_1=f(0), \tag{30}$$

从而定理得证．

由上定理看来，$g(x)$ 是满足条件（D）的 δ 函数，（D）之 3）中的积分即（GNL）积分．不仅如此，关于前述公式（21）我们有下列

定理 6，设 $a=(\cdots,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ c_\bullet,\ a_1,\ \cdots)$

$b=(\cdots,0,\cdots,0,b_0,b_1,\cdots)$，并设 $g(x)$ 与 $\widetilde{g}(x)$ 是定理5中的两个δ函数，分别由 $g^*(x_0)$ 与 $\widetilde{g}^*(x_0)$ 所决定（假定二者均具紧支集的），则由下式

$$\widetilde{g}(a-b)=(G)\int g(a-x)g(x-b)dx \qquad (31)$$

所确定的函数 $\widetilde{g}(x)$ 仍是满足定理5的δ函数。

证．分作下列几步．

1）$a_0\neq b_0$ 时，（31）式右端为0．因为由 g 与 $\widetilde{g}$ 定义知道，此时对任意 x，$g(a-x)$ 与 $\widetilde{g}(x-b)$ 中至少有一为零．

2）由此可设 $a_0=b_0=c_0$，则

$$g(a-x)\widetilde{g}(x-b)=\begin{cases} g^*(a_1-x_1)\cdot\widetilde{g}^*(x_1-b_1)\times 1_{(-1)}，当 \\ \quad x=(\cdots,0,\cdots,0,c_0,x_1,\cdots), \\ 0，对其它的 x. \end{cases} \qquad (32)$$

于是，按（G）积分定义，即有

$$\begin{aligned}(G)\int g(a-x)\widetilde{g}(x-b)dx &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} g^*(a_1-x_1)\times\widetilde{g}^*(x_1-b_1)dx_1\right]\times I_{(-1)} \\ &=\left[\int_{-\infty}^{\infty} g^*(-y)\widetilde{g}^*(y+\overline{a_1-b_1})dy\right]\times I_{(-1)}.\end{aligned} \qquad (33)$$

由（33）式可见，最后积分显然是 (a_1-b_1) 的函数，因此［见（31）式］$\widetilde{g}(a-b)$ 确实是依赖于 $a-b$ 的广义函数．将（33）式最后一项记作 $\widetilde{g}^*(a_1-b_1)\times 1_{(-1)}$，由于假定了 $g^*(x_0)$ 以及 $\widetilde{g}^*(x_0)$ 均具紧支集，于是

$$\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{g}^*(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty}g^*(-z)\widetilde{g}^*(z+y)dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{g^*}(z+y)\,dy \right] g^*(-z)\,dz = 1. \qquad (34)$$

最后，由（33）式可见（31）式所定义的$\widetilde{g}(x)$为：

$$\widetilde{g}(x) = \begin{cases} \widetilde{g^*}(x_1) \times 1_{(-1)}, & \text{当} x = (\cdots,0,\cdots,0,x_1,x_2,\cdots), \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \qquad (35)$$

由（35）式及定理5及其证明可见$\widetilde{g}(x)$确实是δ函数（而且$\widetilde{g^*}(x_1)$具紧支集）。

由定理6即得（21）式。不仅如此，利用（G）积分还能证明习见的导数公式，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)\,dx = -f'(0), \qquad (36)$$

为此，有下述定理

定理 7. $f_0(x_0)$，$f(x)$及$g(x)$的意义同于定理5，$g^*(x_0)$且是具紧支集的。于是

$$(G)\int f(x)g'(x)\,dx = -f_0'(x_0), \qquad (37)$$

其中$g'(x)$表示广义函数$g(x)$的（1，-1）导数。

证。由定义2可见

$$g'(x) = \begin{cases} g^{*\prime}(x_1) \times 1_{(-1)}, & \text{当 } x = (\cdots,0,\cdots,0,x_1,x_2,\cdots), \\ 0, & \text{对其它 } x. \end{cases} \qquad (38)$$

因此［由（26）式］有

$$f(x)g'(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)g^{*\prime}(x_1)\left(\sum_{m=1}^{\infty}x_m \times 1_{(m)}\right)^n\right] \times 1_{(-1)}, \\ \quad \text{当 } x = (\cdots,0,\cdots,0,x_1,x_2,\cdots), \\ 0, \text{ 其它}. \end{cases} \qquad (39)$$

因此可对（37）式左端的（G）积分计算如下：

1）当 $m>1$ 时，$a_{-m}=0$，显然。

2）计算 a_{-1}：

$$a_{-1}=\int_{-\infty}^{\infty}f(0)g^{*\prime}(x_1)dx_1=f(0)\cdot g^{*}(x_1)\Big|_{-\infty}^{\infty}=0.$$

3）计算 a_0：

$$a_0=\int_{-\infty}^{\infty}f'(0)g^{*\prime}(x_1)x_1dx_1=f'(0)\int_{-\infty}^{\infty}g^{*\prime}(x_1)x_1dx_1$$
$$=-f'_0(0)(=-f'(0)). \tag{40}$$

4）当 $m\geqslant1$ 时，$a_m=0$。显然。

由 1）—4）即得定理 7 的证明。

2. 对一般 Schwartz 分布的应用

引理 1. 设 $f_1(x),\cdots,f_k(x)$ 为一列线性独立的普通连续实变函数，则存在一列点（实数）$x_1^{(1)},x_1^{(2)},x_2^{(2)},x_2^{(2)},x_1^{(3)},x_2^{(3)},x_3^{(3)},\cdots$（可简记作为$\{x_k^{(n)}\}$，其中 $k\leqslant n$，$n=1,2,\cdots$），使对任意 n 均有

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1^{(n)}) & f_2(x_1^{(n)})\cdots f_n(x_1^{(n)}) \\ f_1(x_2^{(n)}) & f_2(x_2^{(n)})\cdots f_n(x_2^{(n)}) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_1(x_n^{(n)}) & f_2(x_n^{(n)})\cdots f_n(x_n^{(n)}) \end{vmatrix}\neq0, \tag{41}$$

其中当 $n\neq n'$ 或 $k\neq k'$ 时，$x_k^{(n)}\neq x_{k'}^{(n')}$。

证．从略．

在基本空间内 $\varphi_n\to\varphi$ 的意义是：

1）存在一有限开区间，在其外部所有 φ_n 及 φ 均为零。

2）在这区间上，k 阶导数序列 $\varphi_n^{(k)}$ 一致收敛于 $\varphi^{(k)}$（$k=0,1,2,\cdots$）．

可以证明，基本空间是可分的（这里不证）。即存在于基本空间稠密的可列个元素（每一元素实际是一实变函数）所组成之集 F。

定理 8. 设 $\widetilde{K}$ 是定义于基本空间的分布，F 的意义如上。于是存在一广义函数 $K(x)$，使当 $f_0(x_0)\in F$ 时，

$$(GNL)\int K(x)f(x)dx=\widetilde{K}(f_0), \quad (42)$$

式中 $f(x)$ 与 $f_0(x_0)$ 的关系见（26）式。

证. 为了与上节符号统一起见，F 中元素（均是实变函数）设为 $f_{01}(x_0),\cdots,\ f_{0n}(x_0),\ \cdots$，其中角标"0"仍表示"实变数"的意思。据引理知，存在一列互异实数 $\{x_{0m}^{(n)}\}$，$m\leqslant n,\ n=1,\ 2,\ \cdots$，满足（40）式的条件。

1）由于 $f_{01}(x_{01}^{(1)})\neq 0$，故必存在实数 $C_1^{(0)}$ 合于：

$$C_1^{(0)}\cdot f_{01}(x_{01}^{(1)})=\widetilde{K}(f_{01}). \quad (43)$$

2）由于 $n=2$ 时（41）式成立，下列方程组便是可解的

$$\begin{cases}C_1^{(1)}\cdot f_{01}(x_{01}^{(2)})+C_2^{(1)}\cdot f_{01}(x_{02}^{(2)})=0,\\ C_1^{(1)}\cdot f_{02}(x_{01}^{(2)})+C_2^{(1)}\cdot f_{02}(x_{02}^{(2)})=\widetilde{K}(f_{02})-C_1^{(0)}\\ \quad\cdot f_{02}(x_{01}^{(1)}),\end{cases} \quad (44)$$

由（44）式可解出 $C_1^{(1)}$ 及 $C_2^{(1)}$。

3）在一般情况下，设 $C_k^{(m)}$ 已经依次求出，其中 $k\leqslant m+1$，$m\leqslant m_0$（m_0 为某一定数），那么由于 $n=m_0+1$ 时（41）式成立，可由下列方程组解出 $C_k^{(m_0+1)}$，$k\leqslant m_0+2$：

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{m_0+2} C_i^{(m_0+1)}f_{0s}(x_{0k}^{(m_0+2)})=0 \quad (s=1,2,\cdots,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad m_0+1),\\ \sum_{i=1}^{m_0+2} C_i^{(m_0+1)}f_{0\,m_0+2)}(x_{(k}^{(m_0+2)})=\widetilde{K}(f_{0\,m_0+2})-\end{cases}$$

$$
-\sum_{m=1}^{m_0}\sum_{k=1}^{m+1} f_{0\ m_0+2}\ (x_k^{(m+1)}). \tag{45}
$$

取一可导无限次且具紧支集的实变函数 $g^*(x_0)$，使之满足 $\int_{-\infty}^{\infty} g^*(x_0)\,dx_0 = 1$。于是广义函数 $K(x)$ 便可由下式定出。

$$
K(x) = \begin{cases} C_k^{(m)} g^*(x_{m+1}) \times 1_{[-(m+1)]},\ m \geq 0,\ \text{当} \\ x = (\cdots, 0, \cdots, \underset{\text{第 0 位}}{x_k^{(m+1)}},\ \underset{\text{第 1 位}}{x_k^{(m+1)}},\ \cdots, \\ \quad \cdots \underset{\text{第 } m \text{ 位}}{x_k^{(m+1)}},\ x_{m+1},\ \cdots), \\ 0,\ \text{对其它的 } x. \end{cases} \tag{46}
$$

从（GNL）积分定义及（44）式可验证这样定义的广义函数 $K(x)$ 满足定理条件[(42)式]。从而定理证毕。

从上定理的 F 出发，并考虑函数族 $K \cdot F = \{K \cdot \varphi; \varphi \in F\}$（为书写简单，这里把实变函数 φ 及其诱导的广义函数用同一符号 φ 表示）。可证下列定理（证明从略）。

定理 9. $K(x)$ 由定理 8 决定，则对基本空间的任一元 φ 下式成立。

$$
(GNL)_{K \cdot F} \int K(x)\varphi(x)\,dx = \widetilde{K}(\varphi). \tag{47}
$$

而且（47）中的 F 还可取作 $\{p_{s,r}(x)\}$，其中 $p_{s,r}(x) = \widetilde{p}_s(x) \cdot \exp\left\{-\frac{1}{(x^2 - r^2)^2}\right\}$，$r$ 为（取一切的）有理数，而 $\widetilde{p}_s(x)$ 在 $(-r, r)$ 上为有理系数多项式在 $(-r, r)$ 的外部恒等于 0。

附 注

1．本文写成后，发现Laugwitz曾对数的扩充作过不少工作。他于1968年引进广义幂级数概念[6]，但未以此为基础研究分布．本文基本意义在于用广义数来研究δ函数及Schwartz的一般分布，从代数结构讲广义数同构于广义幂级数的子域，但本文重点在第三及第四节．感谢李邦河同志指出这一点，康多寿同志也指出了一些有关文献[3-6]．

2．广义数应用到量子场论的讨论，见作者的文章《广义数及其应用（II）》（载《西北大学学报》自然科学版1979年第1期）．粗略地讲，将量子场论中对易关系 $\{a_\zeta^*, a_\zeta,\} = \{b_\zeta^*, b_\zeta,\} = \delta_{\zeta,\zeta'}$ 改作 $\{a_\zeta^{*\prime}, a_\zeta\} = \{b_\cdot^*, b_\zeta'\} = \delta_{\zeta,\zeta'} \times 1_{(1)}$，粒子数算符取作 $N_\zeta^{(+)} = a_\zeta^* \times 1_{(-1)}$，$N^{(-)} = b_\zeta^* b_\zeta \times 1_{(-1)}$，并取过渡方程 $(x \times A^{(1)}) \times 1_{(1)} = x + \delta_{(0)}$（式中$A^{(1)}$是发散表达式，$\delta_{(0)}$是无限小量），即能将Dirac关于真空情态的假定用广义数严格表达出来。作者且对一般重整化方案作出类似的尝试性考虑．根据上述考虑，说明$E_{(\text{真空})}$等等在实数范围内不是无限大，相反是无限小，从而完全附合于实验结果．

3．若把$H^{(a)}$中性质（P）$_n$的条件2）取消，则函数$f^{(n)}_{(x_0, \cdots, x_{n-1})}$将依赖于$x_n$，$x_{n+1}$，…，此时可积条件若换作："对于固定的$x_{n+1}$，…，设$f^{(n)}_{(x_0, \cdots, x_{n-1})}$是$L$可积的（以$x_n$为自变量的实函数），且设其积分值并不随$x_{n+1}$，…不同而异，该积分值仍记作$a^{(n)}(x_0, \cdots, x_{n-1})$．"这样得的积分定义就比原来的为广．关于（G）积分也可同样采取这一更广的定义方式，如果这样，则下列定理成立．

定理 10. 设$f_0(x_0)$，$f(x)$，$g(x)$的意义同上，以$g^{(n)}(x)$表n阶的（1，－1）导数．于是当$f^{(i)}(0) = 0 (i \leqslant n-1)$时：

$$(G) \int f(x) g^{(n)}(x) dx = (-1)^n f^{(n)}(0). \tag{48}$$

作者衷心感谢江泽涵、程民德、关肇直教授对本文的关心和指导．

参 考 文 献

[1] Dirac, P.A.M., 量子力学原理（中译本），科学出版社，

1965.

[2] 王成堂：《ω_μ-可加的拓扑空间》，《数学学报》，14(1964) 5, 619—626.

王成堂 (Wang Shu-tang): Remarks on ω -additive Spaces, *Fund.Math.*, 55(1964), 101—112.

[3] Schmeiden, C.& Laugwitz, D., Eine Erweiterung der infinitesimalrechung, *Math.Zeits.*, 69 (1958). 1—39.

[4] Laugwitz, D., Anwendungen unedlichkleiner Zahlen, I, J.für *die reine und Angewandte Math.*, 207 (1961) .53—60.

[5] ———, Anwendungen unendlichkleiner Zahlen, II, *ibid.*, 208 (1961), 22—34.

[6] ———, Eine nichtarchimidische Erweiterung anordeneter, Korper, *Math. Nachr.*, 37 (1968), 225—236.

GENERALIZED NUMBER SYSTEM AND ITS APPLICATIONS(I)

Wang Shu-tang

Abstract

This is a further study of the work published in [2]. A generalized number system is established. The generalized functions denote the functions with generalized number system as their domain and range sp-

ace which are different essentially from the Schwartz distributions. For such functions we have defined (*GNL*) and (*G*) integrals which can be considered as the generalization of the Lebesgue integral for real functions. Dirac δ function can be naturally represented by our generalized functions. This representation is more straightforward than the Schwartz distribution theory. Moreover, each distribution can be described by a generalized function in a natural way.

In another paper entitled "Generalized number system and its applications (II)", (*Acta Natur. Sci.*, Nw. Univ., 1979, No. 1). We consider the applications of *GNS* (Generalized number system) to the quantum field theory. Using *GNS*, we can supply a tentative mathematical model to the renormalization theory, where the commute relation $\{a^{*}_{s'}, a_s\} = \delta_{s,s'}$ should be replaced by $\{a^{*}_{s'}, a^{*}_{s}\} = \delta_{s,s'} \times 1_{(1)}$.

广义函数的连续性、导数及中值定理*

王戌堂　湛垦华

摘　要

文[1]曾引入"广义数"及广义函数概念，后者本质不同于L.Schwartz的分布，乃指定义域及值域均取自广义数的函数。对于这种函数[1]还定义了(m,n)连续性及(m,n)导数概念。本文将进一步研究连续性及导数，并建立类似于过去的微分中值定理。它和文[2]的主要区别即在于这里并不要求其无限可导性。

§1. 广义函数的连续性

§1·1. 设广义数x可表为

$$x=\sum_{k} x_{k}\times 1_{(k)}=(\cdots,x_{-k},\cdots,x_{0},\cdots,x_{k},\cdots) \qquad (1)$$

*本文发表于《西北大学学报》（自然科学版）1980年第2期。

其中 x_k 为普通实数。

此时广义函数 $y=f(x)$，可以将 y 表示为

$$y=\sum_k y_k\times 1_{(k)}=(\cdots,y_{-k},\cdots,y_0,\cdots) \tag{2}$$

其中 y_k 为实数，且有

$$y_k=y_k[(\cdots,x_{-k},\cdots,x_0,\cdots,x_k,\cdots)], \tag{3}$$

即每一项 y_k 均是无穷个实自变量 $x_0,x_{\pm1}$, $x_{\pm2}$, $\cdots$, 的实值函数。为了定义广义函数 $y=f(x)$ 的连续性，首先应在广义数域上定义拓扑结构。

考虑到 x 的每一位 x_k（其中 k 可正、可负或等于 0）均是普通实数，即具有寻常的拓扑结构，这里我们采取类似于箱拓扑（Box topology）的结构，此即：

定义 1.1. 设 $x^{(0)}$ 为广义数域中任一点，$\delta=(\cdots,\delta_{-k},\cdots,\delta_0,\delta_1,\cdots)$[(1)] 为实数列，其中 $\delta_m>0$。所谓 $x^{(0)}$ 的 δ 邻域 $U(x^{(0)},\delta)$ 为：

$$U(x^{(0)},\delta)=\{x;\ x \text{ 为广义数，且} |x_m-x_m^{(0)}|<\delta_m\}, \tag{4}$$

(4) 式中 $x^{(0)}=(\cdots,x_{-K}^{(0)},\cdots,x_0^{(0)},x_1^{(0)},\cdots)$.

在上述定义基础上，即可引入连续性概念如下：

定义 1.2. 所谓广义函数 $y=f(x)$ 在点 $x^{(0)}$ 是强连续的，乃指在上述箱拓扑意义下的映象 $x\to y$ 在点 $x^{(0)}$ 是连续的。

但为了其它理由，我们要将上述条件减弱为下列的弱连续性，此即

定义 1.3. 所谓广义函数 $y=f(x)$ 在点 $x^{(0)}$ 是弱连续的，

---

(1) 当考虑广义数域的某个子域时，可允许某些 $\delta_s=0$，例如对普通实变函数，即取 $\delta_s=0$ $(s\neq0)$.

乃指 y 的每一位 $y_k = y_k[(\cdots, x_0, \cdots)]$作为广义数 $\boldsymbol{x}$ 的实值函数在上述拓扑意义下是连续的。

关于两种连续性，下列定理显然成立。

定理 1·1. 广义函数 $y = f(x)$ 若在某点 $x^{(0)}$强连续，则也必在同一点 $x^{(0)}$弱连续。

容易构造反例说明定理 1.1 的逆命题不成立。

以下将主要研究广义函数的弱连续性。

在同一点 $\boldsymbol{x}^{(0)}$弱连续广义函数的和、差、积、商的普通实变连续函数的定理仍然成立，但有关复合函数的定理未必成立，然而有下列

定理 1·2. 设广义函数 $y = f(x)$在点 $x^{(0)}$弱连续，$y^{(0)} = f(x^{(0)})$。又设广义函数 $z = \Psi(y)$在点 $y^{(0)}$弱连续，而且 $z = (\cdots, z_{-k}, \cdots, z_0, \cdots)$时每一位 z_m 仅与有限个 y_s 有关。则复合函数 $z = F(x) = \Psi[f(x)]$在 $x^{(0)}$点也是弱连续的。

注　在物理及天文学中一般只限于考虑有限个层次，因此复合函数的有关连续性定理仍然成立。实际上，若只限于有限个层次进行考虑的话，则弱连续性与强连续性便是等价的。

§1·2. 下边建立有限区间上普通实变连续函数极值定理的推广。

定理 1·3. 设 $y = f(x)$是定义于集合 $E = \{x : x$ 是广义数，其中 $a_m \leqslant x_m \leqslant b_m\}$上的广义弱连续函数，其中 $a = (\cdots, a_m, \cdots)$ $b = (\cdots, b_m, \cdots)$ 是广义数，n_0是任意整数，而 $y_{n_0}{}^{(x)}$ 仅依赖于有限个 x_s，则必有一广义点 $\xi = (\cdots, \xi^0, \cdots)$ 满足下列条件：

i) $a_m \leqslant \xi_m \leqslant b_m$；

ii) $y_{n_0}(x)$在点 ξ 取极（极大或极小）值。

证。以下先证明$y_{n_0}(x)$（注意是实值函数）于$\bar{E}$上是有界的。用反证法。不妨设$\sup\limits_{x\in E}\{y_{n_0}(x)\}=+\infty$（$\inf\limits_{x\in E}\{y_{n_0}(x)\}=-\infty$时同样可证明）。于是存在一列（广义）点$\{x^{(k)}\}$，满足

$$y_{n_0}(x^{(k)})\to\infty. \tag{5}$$

今设
$$x^{(k)}=(\cdots,x_{-m}^{(k)},\cdots,x_0^{(k)},\cdots,x_m^{(k)},\cdots) \tag{6}$$
其中$k=1,2,\cdots$。

(a)．首先由于$x_0^{(k)}$满足$a_0\leqslant x_0^{(k)}\leqslant b_0$，由实数的习知性质，不难知道，必存在子列$\{x^{k_i(1)}\}$：

$$x^{k_i(1)}=(\cdots,x_{-m}^{k_i(1)},\cdots,x_0^{k_i(1)},\cdots,x_m^{k_i(1)},\cdots) \tag{7}$$

使得该子列的第0位收敛于某个实数ξ_0：

$$x_0^{k_i(1)}\to\xi_0. \tag{8}$$

(b)．根据与(a)相同理由，又存在(7)的子列为$x^{k_i(2)}$；$x^{k_i(2)}$的子列为$x^{k_i(3)}$；…，一般得到$x^{k_i(n)}$的子列为$x^{k_i(n+1)}$：

$$x^{k_i(n+1)}=(\cdots,x_{-m}^{k_i(n+1)},\cdots,x_0^{k_i(n+1)},\cdots,x_m^{k_i(n+1)},\cdots) \tag{9}$$

使对于$s\leqslant n$恒有$(s\geqslant0)$：

$$x_s^{k_i(n+1)}\to\text{某实数}\ \xi_n, \tag{10}$$

于是便得点列$x^{k_n(n)}$ $(n=1,2,\cdots)$。

设
$$x^{k_n(n)}=(\cdots,x_{-m}^{k_i(n)},\cdots,x_0^{k_i(n)},\cdots) \tag{11}$$

时，则对$s\geqslant0$恒有

$$x_s^{k_n(n)}\to\text{某实数}\ \xi_s, \tag{12}$$

其中$a_s\leqslant\xi_s\leqslant b_s$。

(c)．$a=(\cdots,0,\cdots,0,a_{m_0},\cdots)$及$b=(\cdots,0,\cdots,0,b_{n_0},\cdots)$时，设$k_0=\min\{m_0,n_0\}$我们可以从$k_0$出发进行上述(a)，(b)两步，最后便得到下列事实：

存在点列$x^{(k)}$，设$x^{(k)}=(\cdots,x_{-m}^{(k)},\cdots,x_0^{(k)},\cdots,x_m^{(k)},\cdots)$则满

足条件：

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ 对整数\ s,恒有\ x_s^{(k)}\to\xi_s;\\(2)\ y_{n_0}(x^{(k)})\to\infty.\end{array}\right\}\tag{13}$$

以下只须说明（13）是与 $f(x)$ 的弱连续性相矛盾，就完成了证明的前一半：$y_{n_0}(x)$ 是有界的。

实际上，首先可取 N 使得 $m\geqslant N$ 时，$y_{m_0}(x)$ 不依赖于 x_m（这里 x_m 表示 x 的第 m 位），今设 $\delta=(\cdots,\delta_{-m},\cdots,0,\cdots,\delta_m,\cdots)$ 任意给出，其中 $\delta_{\pm m}>0$，对应于 $x^{(k)}$，取 $\overline{x}^{(k)}=(\cdots,\overline{x}_{-m}^{(k)},\cdots,\overline{x}_0^{(k)},\cdots,\overline{x}_m^{(k)},\cdots)$ 为：若 $m<N$，则 $\overline{x}_m^{(k)}=x_m^{(k)}$；而若 $m\geqslant N$，则取 $\overline{x}_m^{(k)}=b_m$。于是 $y_{n_0}(\overline{x}^{(k)})\to\infty$，这是矛盾。

以下转入定理的证明。

上边已证明 y_{n_0} 在 E 上是有界的。不妨仅取上界考虑，下界情况同此。设 $M=\sup\limits_{x\in E}\{y_{n_0}(x)\}$。完全同于 (a) — (c) 的证明，仅须将其中所出现的 ∞ 一律换作 M，便能证明 $y_{n_0}(\xi)=M$。　　（证毕）

§2. 广义函数的导数

§2·1. 对于广义函数 $y=f(x)$ 的导数，也有强导数与弱导数之分。

定义 2·1. 对于固定点 $x^{(0)}$，考虑差商

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x^{(0)}+\Delta x)-f(x^{(0)})}{\Delta x}=(\cdots,\eta_{-m},\cdots,\eta_0,\cdots)\tag{14}$$

(14) 式中 $\Delta x=(\cdots,(\Delta x)_{-m},\cdots,(\Delta x)_0,\cdots)$，而 η_s 又是 Δx 的函数（实值函数）。将 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 看作广义数域到其自身的映象，若二者均取箱拓扑时有[1]：

(1) 见 p.1的脚注。

$$\Delta x \to 0 \text{ 时}, \frac{\Delta y}{\Delta x} \to \eta^{(0)}$$

则 $\eta^{(0)}$ 即称作是 $y=f(x)$ 于点 $x^{(0)}$ 的强导数，写为

$$\left.\frac{dy}{dx}(\text{强})\right|_{x^{(0)}} = \eta^{(0)}. \tag{15}$$

定义 2·2. 记号同定义 2·1，若每一位 η_s 作为广义数 Δx 的实值函数，后者取箱拓扑时，下列条件成立：

$$\Delta x \to 0 \text{ 时}, \eta_s \to \eta_s^{(0)} \tag{16}$$

则 $\eta^{(0)} = (\cdots, \eta_{-m}^{(0)}, \cdots, \eta^{(0)}, \cdots)$ 即称作广义函数 $y=f(x)$ 于 $x^{(0)}$ 的弱导数，写为：

$$\left.\frac{dy}{dx}(\text{弱})\right|_{x^{(0)}} = \eta^{(0)}. \tag{17}$$

显然若 $y=f(x)$ 于点 $x^{(0)}$ 强可导，则其也必弱可导，而且二者导数相等，反之不真。

值得注意，文[1]关于 δ 函数，虽有各阶 (m,n) 导数，但不具有本文意义下的弱导数。从而更不是强可导的。然而，若只限于 x 的子域 $E=\{x;\ x_k=0,\ k\neq 1\}$，则它便是可导的。

§2·2. 以下将着重于考虑弱导数。为了简单起见，本文将略去右上角的弱字，而不再另行说明。

定理 2·1. 设广义函数 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 均于 $x^{(0)}$ 有弱导数，则 $F(x)=f_1(x)\times f_2(x)$ 于 $x^{(0)}$ 也有弱导数，而且下列公式成立：

$$\left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_{x^{(0)}} = f_1(x^{(0)}) \times \left.\frac{df_2(x)}{dx}\right|_{x^{(0)}} + f_2(x^{(0)}) \times \left.\frac{df_1(x^{(0)})}{dx}\right|_{x^{(0)}} \tag{18}$$

证。考虑差商：

$$\frac{\Delta f_i(x)}{\Delta x}=\frac{f_i(x^{(0)}+\Delta x)-f_i(x^{(0)})}{\Delta x}=(\cdots,\widetilde{\eta}_{-m}^{(i)},\cdots,\widetilde{\eta}_0^{(i)},\cdots) \tag{19}$$

其中：$i=1,2$；$\Delta x=(\cdots,(\Delta x)_m,\cdots)$；$\widetilde{\eta}_s^{(i)}$ 为 Δx 的实值函数，于是 $\Delta x\to 0$ 时 $\widetilde{\eta}_s^{(i)}\to\eta_s^{(i)}$，而 $\eta^{(i)}=(\cdots,\eta_s^{(i)},\cdots)$ 为 $f_i(x)$ 于 $x^{(0)}$ 点的（弱）导数。

由上所述，可见：

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\frac{F(x^{(0)}+\Delta x)-F(x^{(0)})}{\Delta x}$$

$$=f_1(x^{(0)})\times\left.\frac{\Delta f_2(x)}{\Delta x}\right|_{x^{(0)}}+f_2(x^{(0)})\times\left.\frac{\Delta f_1(x)}{\Delta x}\right|_{x^{(0)}}$$

$$+\Delta f_1(x)\times\left.\frac{\Delta f_2(x)}{\Delta x}\right|_{x^{(0)}} \tag{20}$$

(a)．考虑 $f_1(x^{(0)})\times\left.\frac{\Delta f_2(x)}{\Delta x}\right|_{x^{(0)}}=f_1(x^{(0)})\times\frac{f_2(x^{(0)}+\Delta x)-f_2(x^{(0)})}{\Delta x}$.

设 $f_1(x^{(0)})=(\cdots,y_s^{(0)},\cdots)$ 及 $\left.\frac{\Delta f_2(x)}{\Delta x}\right|_{x^{(0)}}=(\cdots,\widetilde{\eta}_s,\cdots)$ (21)

于是 $f_1(x^{(0)})\times\left.\frac{\Delta f_2(x)}{\Delta x}\right|_{x^{(0)}}=(\cdots,\widetilde{\xi}_s,\cdots)$ 时须有

$$\widetilde{\xi}_k=\sum_{l+m=k}y_l^{(0)}\times\widetilde{\eta}_m \tag{22}$$

注意和式（22），只有有限个非零项；$\Delta x\to 0$ 时每一 m 有 $\widetilde{\eta}_m\to\eta_m$。因此 $\Delta x\to 0$ 时由（22）得 $\widetilde{\xi}_k\to\xi_k$；

$$\xi_k = \sum_{1+m=k} y_l^{(0)} \times \eta_m. \tag{23}$$

于是，设 $\xi=(\cdots,\xi_k,\cdots)$ 时便得 $f_1(x^{(0)}) \times \left.\dfrac{df_2(x)}{dx}\right|_{x^{(0)}} = \xi$

$$\tag{24}$$

此即 $f_1(x^{(0)}) \times \dfrac{\Delta f_2(x)}{\Delta x} \longrightarrow f_1(x^{(0)}) \times \left.\dfrac{df_2(x)}{dx}\right|_{x^{(0)}}$.

(b)．用与 (a) 完全类似的方法可证明

$$\Delta f_1(x^{(0)}) \times \left.\frac{\Delta f_2(x)}{\Delta x}\right|_{x^{(0)}} \longrightarrow 0 \tag{25}$$

由此定理证毕.

对于弱导数的链式法则，此处从略.

§3. 中值定理

为了方便，首先引入广义数域的隔间概念. 设 a 和 b 是两个广义数：$a=(\cdots,0,\cdots,0,a_{m_0},\cdots)$ 和 $b=(\cdots,0,\cdots,0,b_{n_0},\cdots)$．（箱）闭隔间 $[a,b]$ 是集合 $\{x: a_s \leqslant x_s \leqslant b_s\}$.

定理3·1. 设广义（弱）可导函数 $f(x)$ 定义于 $[a,b]$，$\xi\in[a,b]$. 如果对某个网 $\{\delta^{(\lambda)}=(\cdots,\delta_0^{(\lambda)},\cdots),\ \lambda\in\Lambda\}$（其中 Λ 是定向集）每个项 y_k 在区间 $[\xi-\delta^{(\lambda)},\ \xi+\delta^{(\lambda)}]$ 上是非单调的（或恒取常值）的函数. 如果在箱拓扑意义下，$\delta^{(\lambda)}\to 0$，则

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=\xi} = 0.$$

证明. 反证法，设

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{\xi} = (\cdots,\eta_s,\cdots) \neq 0 \tag{26}$$

不失一般性，设 s_0 是使 $\eta_{s_0}\neq 0$ 的最小指标，并且设 $\eta_{s_0}>0$

则不难证明，存在 $\lambda_0\in\Lambda$，当$\lambda\geqslant\lambda_0$ 时

$$\left[\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\right]_{s_0}>\frac{\eta_{s_0}}{2} \tag{27}$$

其中 s_0表示第 s_0-项，$\Delta x=(\cdots,(\Delta x)_s,\cdots)$，$|(\Delta x)_s|\leqslant\delta_s^{(\lambda)}$。

由（27），能够证明$f(x)$的第 s_0-项不满足定理的假设。矛盾。

定理 3·2．在定理 3·1的假设下，设

$$f(x)=[\varphi(b)-\varphi(a)](x-a)-(b-a)[\varphi(x)-\varphi(a)] \tag{28}$$

则

$$\varphi(b)-\varphi(a)=(b-a)\frac{d\varphi(x)}{dx}\bigg|_{\xi}.$$

现在考虑一种特殊情形，即，仅考虑广义数子集 $E=\{x:$ 当 $s\neq k_0$ 时 $x_s=0\}$。设 $y=f(x)$是定义于 E 上满足条件：$s\neq m_0$ 时 $y_s=0$ 的广义函数。则我们有：函数的弱导数等于强导数，并且两者等于(m_0,k_0)-导数。

定理 3·1′．如果 $y=f(x)$是如上定义的广义函数，并且满足 $f(a)=f(b)$，其中 a，$b\in E$，则存在点 ξ 使$\dfrac{df(x)}{dx}\bigg|_{\xi}=0$。

定理 3·2′．如果 $y=f(x)$如上所定义，不一定有 $f(a)=f(b)$，则存在点 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(b)-f(a)=(b-a)\dfrac{df(x)}{dx}\bigg|_{\xi}$ 成立。

以上两个定理的证明省略。

参 考 文 献

[1] 王成堂：《广义数及其应用（I）》，1979，《中国科学》（数学

专辑I)，p. 1—11.

[2] 李邦河：《一种非阿几米德域上的微积分》，1979，《数学学报》.

THE CONTINUITY, DERIVATIVE AND THE MEAN-VALUE THEOREM OF A (GNS) FUNCTION

Wang Shu-tang, Zhan Ken-hua

Abstract

For a (GNS) function, in this paper, we define the notion of strong and weak continuity and derivatives. Some theorems concerning mean-valued properties are also derived

广义函数的级数展开*

王戌堂　湛垦华

摘　要

本文目的有二：首先对（GNS）函数定义了不定积分，从而得到 Heaviside 跳跃函数的明确表达式。其次研究了一类（GNS）函数的 Taylor 展开，以（GNS，幂级数作工具引入广义的指数函数 e^x 以及对数函数 lnx 等。有趣的是寻常所用到的一些基本性质在这里仍然保持着，从而这里引入的函数乃是古典初等函数的自然推广。

作者文[1]曾引入广义数与广义函数的概念。后者乃指以广义数作基础的函数关系，本质不同于 L.Schwartz 的分布。利用[1]中所定义的（GNL）与（G）积分可自然得到 Dirac 的

*本文发表于《西北大学学报》（自然科学版）1980 年第 4 期

δ 函数。文[2]研究了广义函数的导数并得到一些初步定理。然而迄今为止我们尚未研究不定积分。

本文分作如下几节。

首先，§1中先对 δ 函数进行分析，并研究变上限的（不定）积分，后者的导数显然即应等于原来的 δ 函数，为此就应引入一种较[2]更自然的导数定义，它较弱于[2]中所给出者。因此今后，将[2]中的导数将冠以严（弱）导数等等。本节中一个最有意义的副产品即是得到了 Heaviside 跳跃函数的表示方法。由§1所得结果的启发，本文§2对更一般的广义函数定义了不定积分，并证明其导数恰正等于原给广义函数。以此作为基础，我们于§3中证明分部积分法，并从而得到广义函数的 Taylor 展开公式。最后，本文§4用级数定义广义对数函数及指数函数，证明几个最基本的定理。

§1. Dirac 的 δ 函数

按照文[1]所述，可由我们所给的广义函数概念来构造 δ 函数。为此，首先取一无限次可导、具紧支集且满足下条件的普通实变函数 $g^*(t)$：$\int g^*(t)\,dt=1$。然后由 g^* 定义广义函数。

$$g(x)=\begin{cases} g^*(x_1)\times 1_{-1}, & \text{当 } x=(\cdots,0,\cdots,0,x_1,x_2\cdots)\ ; \\ 0, & \text{对其它 } x. \end{cases} \qquad (1)$$

文[1]证明了上述 $g(x)$ 即是 Dirac 的 δ 函数。

现取一固定（广义）点，例如可取 $a=(-1)\times 1_{(0)}$ 并设 $y=(\cdots,y_{-m},\cdots,y_0,\cdots,y_n,\cdots)$ 是一个广义变量，现在我们来定义不定积分（定义过程中 y 是固定的）。

首先引入广义函数 $\widetilde{g}(x)$：

$$\widetilde{g}(x)=\begin{cases}g(x)，当 x 位于 a,y 之间时；\\0,\quad 对其它的 x。\end{cases}\tag{2}$$

于是当 $y=(\cdots,0,\cdots,0,y_1,y_2,\cdots)$ 时

$$(GNL)\int\widetilde{g}(x)\,dx=\int_{-\infty}^{y_1}g^*(t)\,dt\tag{3}$$

(3)式积分即可认作是 $g(x)$ 限制于集合 $E_0=\{x:x\geqslant0,\ 且\ x_1<y_1\}$ 上的积分，即积分

$(GNL)\int_{E_0}g(x)dx$。然而作为不定积分尚应加上一系列尾量部分，它们是集合 $E_k=\{x:x\geqslant0,\ m<k$ 时 $x_m=y_m$ 而且 x^k 位于 0 与 y_k 之间$\}$上的积分，其中 $k=2,\cdots$。由于 $g(x)$ 依赖于 x_0 与 x_1，故而它于（这些）E_k 上的积分 G_k 显然便是（当 $y_{k+1}=0$ 时取 $G^k=0$）：

(i) $y\neq0$ 时 $\quad G_k=0$；

(ii) $y_0=0$ 时 $\quad G_k=g^*(y_1)\times y_{k+1}\times1_{(k-1)}$。 (4)

总之，设 $G(x)$ 是 $g(x)$ 的不定积分 $G(y)=\int_a^y g(x)\,dx$，则 $G(x)$ 的具体结果将是

第 0 位 ↓

$$G(x)=\begin{cases}0,\ 当\ x<(\cdots,0,\cdots,0,-\infty,-\infty,\cdots)\\1,\ 当\ x>(\cdots,0,\cdots,0,+\infty,\infty,\cdots)\\\int_{-\infty}^{x_1}g^*(t)dt+\sum\limits_{k=1}^{\infty}g^*(x_1)\times x_{k+1}\times1_{(k)},\ 对其它\end{cases}\tag{5}$$

x，即：$x=(\cdots,0,\cdots,0,x_1,x_2,\cdots)$ 时。

注．文[1]（GNL）积分着重点在于实数值，现在不定积

分由于考虑到“边界”贡献加入了一些尾量部分，若限制于普通实数而不计尾量（后者永处于高级数区），则其二者之间的关系完全同于古典分析，特别，设广义函数 $y=f(x)=(\cdots,y_0,\cdots,y_n,\cdots)$ 有关系：y_0 仅是 x_0 的函数，且 $y_0=0$ 时 $y_k=0$，$(k<0)$，则二种积分的关系就与古典分析中的完全一致。

下边讨论函数 $y=f(x)$ 的导数。

定义 1.1 设 $y=f(x)$ 为一广义函数，x_0 是一广义固定点（不失一般性可认为该函数定义于全广义数域上，否则仅须作一些明显修改）；记 $x=x_0+\Delta x$，其中 $\Delta x=(\cdots,(\Delta x)_{-m},\cdots,(\Delta x)_0,\cdots,(\Delta x)_n,\cdots)$. 作差商

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=(\cdots,b_{-m},\cdots,b_0,\cdots) \tag{6}$$

其中 $b_k=b_k(\Delta x)$.

所谓 $y=f(x)$ 于点 x_0 的导数为 $(\cdots,a_{-m},\cdots,a_0,\cdots,a_n,\cdots)$ 是指下条件成立：对每一整数 l 及任意实数 $\varepsilon>0$，存在实数列 $\cdots,\delta_{-m},\cdots,\delta_0,\cdots,\delta_n,\cdots$，其中 $\delta_k\geqslant0$，从某 k_0 起即 $k\geqslant k_0$ 时 $\delta_k>0$，且能由 $|(\Delta x)_s|\leqslant\delta_s(s=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 推出

$$|b_l-a_l|<\varepsilon. \tag{7}$$

注意上述定义与文[2]中弱导数定义的区别在于，此处定义中之 k_0 是可以变的（随 ε 而变），因此，今后文[2]中定义的导数将一律冠以“严”字。因为上述定义显然弱于[2]中者。

定理 1.1 设 $G(x)$ 是前述 δ 函数 $g(x)$ 的不定积分，则 $G(x)$ 的导数 $G'(x)=g(x)$.

证。由 (5) 的第一式及第二式知：当 $x=(\cdots,x_{-m},\cdots x_0,\cdots,x_n,\cdots)$ 不是形为 $(\cdots,0,\cdots,0,x_1,x_2,\cdots)$ 的广义数时

$G'(x)=0$。

由 (5) 的第三式，当 $x=(\cdots,0,\cdots,0,x_1,x_2,\cdots)$ 时，于定义 1.1 中取 $k_0=2$ 容易算得

$$(\cdots,b_{-m},\cdots,b_0,\cdots,b_n,\cdots)=g^*(x_1)\times 1_{(-1)} \tag{8}$$

因此

$$G'(x)=g^*(x_1)\times 1_{(-1)}=g(x) \tag{9}$$

〈证毕〉

从纯实数范围看，$G(x)$ 取值情况由 (5) 显然是

$$G(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x<0 \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } x>0 \text{ 时}.\end{cases} \tag{10}$$

这正是 Heaviside 的跳跃函数。定理 1.1 说明 Heaviside 函数的导数正是 δ 函数 $g(x)$。其实 (5) 式才是 Heaviside 函数的明确具体表达式。

注意定理 1.1 证明中取 $k_0=1$ 就行了，但不得取 $k_0=0$。而上述导数不得取文[2]中的严弱导数，因为后者由函数定义域的考虑则应取 $k_0=0$。

§2. 广义函数的不定积分

为了叙述方便起见，采取下列一些限制：(1) 所有自变量 $x=(\cdots,x_{-m},\cdots,x_0,\cdots,x_n,\cdots)$ 均假定当 $k<0$ 时 $x_k=0$。(2) 函数 $y=f(x)=(\cdots,y_{-m},\cdots,y_0,\cdots,y_n,\cdots)$ 是 (GNL) 可积的，而且每一位 y_k 均仅依赖于 x 的有限个 x_s：

$$y_k=y_k(x_{s1},\cdots,x_{sl}) \tag{11}$$

其中 l 是 k 的函数，$l=l(k)$。

可以按上述§1中的思路构造$f(x)$的不定积分$F(z)=\int_a^z f(x)dx$，其中a是预先任意固定的广义点，比如可取$a=(\cdots,0,\cdots,0,\cdots)$．不定积分$F(z)$与[1]中积分$(GNL)\int f(x)dx$的主要区别即在于前者考虑到边界点$z$而于后者加入了一些尾量，它存在于高级$(n\geqslant 1)$数区之中．当仅看其实数部分，且取全广义数域时前者自然得到后者，然而正是这些尾量使$F(x)$的导数$F'(x)$正好等于$f(x)$.实际上，我们发现在只满足这些条件的要求下不定积分仍不是唯一确定的，我们可以考虑采取其中之一种．

定义 2.1　设广义函数为$y=f(x)=(\cdots,y_{-m},\cdots,y_0,\cdots,y_n,\cdots)$，它是$(GNL)$可积的，且满足(11)条件，所谓$f(x)$的不定积分乃指$F(x)=(\cdots,0,\cdots,0,[F(x)]_0,\cdots,[F(x)]_n,\cdots)$，其中$[F(x)]_k$的决定方法如下：

$$(a)\quad [F(x)]_0=(GNL)\int \widetilde{f}_x(z)dz \tag{12}$$

$$式中\quad \widetilde{f}_x(z)=\begin{cases} f(x), & 当\ a\leqslant z\leqslant x\ 时, \\ 0, & 对其它\ z. \end{cases} \tag{13}$$

又

(13)中a是任一固定广义点，比如取$a=(\cdots,0,\cdots,0,\cdots)$.

(b) 对每一位$y_k=y_k(z_{s1},\cdots,z_{sm})$作和：

$$\xi_k=\int_0^x y_k(x_{s1},\cdots,x_{sm-1},t)dt\times 1_{(k)}+\sum_{l<s_m} y_k(x_{s1},\cdots,x_{sm})\times x_l \times 1_{(l+k)}. \tag{14}$$

(c) 最后取$F(x)$的尾量部分为$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$，将此尾量加入于(a)中之$[F(x)]_0\times 1_{(0)}$即最终地得到不定积分$F(x)$.

下边讨论不定积分与原给函数的关系。

定理 2.1 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的不定积分，则 $F'(x)=f(x)$ 即

$$\left[\int_a^x f(z)\,dz\right]'=f(x). \tag{15}$$

证．设

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=(\cdots,\eta_{-m},\cdots,\eta_0,\cdots,\eta_n\cdots).$$

当 x 固定时 η_k 将是 $\Delta x=(\cdots,(\Delta x)_{-m},\cdots,(\Delta x)_0,\cdots,(\Delta x)_n,\cdots)$ 的函数，且由式(14)可见，当取 $(\Delta x)_s=0, s\leqslant s_m$（见(11)式），则有 $\eta_k=y_k(x_{s1},\cdots,x_{sm})$．由定义1.1即得 $F'(x)=f(x)$． （证完）

为着说明，今举以下例子．

试考虑文[1]式(46)所定义的广义函数 $K(x)$：

$$K(x)=\begin{cases} C_k^{(m)}\, g^*(x_{m+1})\times 1_{[-(m+1)]},\ m\geqslant 0,\ \text{当} \\ \qquad x=(\cdots,0,\cdots,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{第 0 位}}}{x_k^{(m+1)}},\cdots,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{第 } m \text{ 位}}}{x_k^{(m+1)}},x_{m+1},\cdots), \\ 0,\ \text{对其它的 } x. \end{cases} \tag{16}$$

(16)中 $C_k^{(m)}$，$k=1,2,\cdots,m+1, m=1,2,\cdots$，为满足文[1]式(45)的实系数；$g^*(t)$ 为满足条件 $\int g^*(t)\,dt=1$ 的无限次可导且具紧支集的普通实变函数；实数点列 $\{x_k^{(n)}\}$ 其中 $k\leqslant n$，$n=1,2,\cdots$，满足引理1（文[1]的(41)式．同时不难看出（[1]定理9后边所述）对于点列 $\{x_k^{(n)}\}$ 除(41)外尚可附加下列条件：

(*) 设 $[-M,M]$（$M<+\infty$）是任意实数区间，则 $\{x_k^{(n)}\}$ 中只有有限个被包含于该区间之中．为着叙述简单，还假设 $x_k^{(n)}\geqslant 0$ 成立．取 $a=(\cdots,0,\cdots,0,\cdots)$ 及 $z=(\cdots,z_{-m},\cdots,z_0,\cdots,z_n,\cdots)$ 按定义2.1可计算 $\int_a^z K(x)\,dx$ 的值如下：

(1) 当 $z>(\cdots,0,\cdots,0,0,+\infty,\cdots)$ 时

$$\underset{\text{第 0 位}}{\uparrow}$$

$$\int_a^y K(x)\,dx=(GNL)\int K(x)\,dx=\widetilde{K}(1) \tag{17}$$

注意 (17) 中右端 $\widetilde{K}(1)$ 中的"1"表示定义于实数直线上且恒等于 1 的实常函数，这函数显然并不属于基本空间，然而可将它加入文[1]定理 8 中之 F，此时并可规定 $\widetilde{K}(1)$ 一个（随意）值，于是定理 8 的一切证明步骤仍然照旧成立。

(2) 若 $z<(\cdots,0,\cdots,0,-\infty,-\infty,\cdots)$，则有

$$\underset{\text{第 0 位}}{\uparrow}$$

$$\int_a^z K(x)\,dx=0. \tag{18}$$

(3) 计算函数

$$K_m(x)=\begin{cases} g^*(x_m)\times 1_{(-m)}, & \text{当 } x=(\cdots,0,\cdots,a_1,a_2,\cdots,a_{m-1},x_m,\cdots)\text{ 时} \\ 0, & \text{对其它 } x. \end{cases} \tag{19}$$

的不定积分，(19) 中 $a_0=a_1=a_2=\cdots=a_{m-1}=$ 实常数。并且假定 $(\cdots,0,\cdots,-\infty,-\infty,\cdots)<z<(\cdots,0,\cdots,+\infty,+\infty,\cdots)$.

$$\underset{\text{第 0 位}}{\uparrow}\qquad\qquad\qquad\qquad\underset{\text{第 0 位}}{\uparrow}$$

按定义 2.1，设 $\int_a^z K_m(x)\,dx=\sum_k \xi_k$，则当 $k<0$ 时 $\xi_k=0$；而当 $k=0$ 时：

(i) 若 $z<(\cdots,0,\cdots,a_0,a_1,\cdots,a_{m-1},-\infty,-\infty,\cdots)$ 则 $\xi_0=0$；

(ii) 若 $z>(\cdots,0,\cdots,a_0,a_1,\cdots,a_{m-1},+\infty,+\infty,\cdots)$ 则

$\xi_0 = 1$;

(iii) 若 z 是形为 $z = (\cdots, 0, \cdots, 0, a_0, a_1, \cdots, a_{m-1}, z_m, \cdots)$ 的广义数($a_0, \cdots, a_{m-1}$ 的意义见前)，则 $\xi_0 = \int_a^z g^*(t)\,dt$。

至于 $k>0$ 时的 ξ_k，容易看出当 z 是(iii) 中形式时 $\xi_k = g^*(z_m) \times z_{m+1} \times 1_{(k)}$；否则 $\xi_k = 0$。

(4) 最后计算 $K(x)$ 的不定积分 $\int_a^z K(x)\,dx$，其中 $(\cdots, 0, -\infty, -\infty, \cdots) < z < (\cdots, 0, \cdots, 0, +\infty, +\infty, \cdots)$。

（两处箭头分别指向 $-\infty$ 与 $+\infty$，标注：第 0 位　　第 0 位）

若设 $\int_a^y K(x)\,dx = \sum_k \xi_k$，则由上述之(3)有下列结果：

(i) 当 $k<0$ 时 $\xi_k = 0$；

(ii) 当 $k=0$ 时 $\xi_0 = \sum{}' C_k^m + \delta_0$, $\qquad$ (20)

其中右端第一项的求和遍取满足下条件的 m，k：$(\cdots, 0, \cdots, x_k^{(m\pm1)}, \cdots x_k^{(m\pm1)}, +\infty, +\infty, \cdots) < y$ $\qquad$ (21)

而

$$\delta_0 = \begin{cases} C_{k_0}^{(m_0)} \times \int_0^{y_{(m_0+1)}} g^*(t)\,dt, & \text{当存在 } m_0, k_0 \text{ 使} \\ \quad z = (\cdots, 0, \underset{\text{第 0 位}}{x_{k_0}^{(m_0\pm1)}}, \cdots, \underset{\text{第 } m_0 \text{ 位}}{x_{k_0}^{(m_0\pm1)}}, z_{(m_0+1)}, \cdots); & \\ 0, & \text{对其它 } z. \end{cases} \qquad (22)$$

(iii) $k>0$ 时若 z 的形式为 $z = (\cdots, \underset{\text{第 0 位}}{x_{k_0}^{(m_0\pm1)}}, \cdots, \underset{\text{第 } m_0 \text{ 位}}{x_{k_0}^{(m_0\pm1)}}, z_{(m_0+1)}, \cdots)$ 则 $\xi_k = C_{k0}^{(m_0)} \times g^*(z_{m_0\pm1}) \times z_{(m_0+k+1)} \times 1_{(k)}$ (23)

否则 $\xi_k = 0$。

注意由于前述关于 $\{x_k^{(m)}\}$ 的条件(*)容易验证以上各式均

是有意义的。至今全部计算完毕。

由式(23)，若于定义 1.1 中取 m_0 代替那里的 k_0，便可直接验证 $\left[\int_a^z K(x)dx\right]'=K(z)$。由此明显看出这里导数定义正是保证了便于处理类似于 δ 函数等的函数。注意此时，下列关系不必成立

$$\int_a^z f'(x)dx=f(z)-f(a) \tag{24}$$

仅管式(24)两端的导数相等，然有下列定理成立。

定理 2.2 设有二广义函数 $y=f(x)$ 与 $z=g(x)$；$y=(\cdots, y_{-m},\cdots,y_0,\cdots,y_n,\cdots)$，$z=(\cdots,z_{-m},\cdots,z_0,\cdots,z_n,\cdots)$ 对每一整数 k，y_k 与 z_k 均依赖于同一组的有限个 x_s，即

$$y_k=y_k(x_{s_1},\cdots,x_{s_k})$$
$$z_k=z_k(x_{s_1},\cdots,x_{s_k}) \tag{25}$$

又设于定义 1.1 中取固定的 k_0 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均可导而且 $f'(x)=g'(x)$。于是必有仅依赖于 $x_k, k<k_0$，的可导广义函数 $h(x)$ 使 $f(x)-g(x)=h(x)$。

特别，设仅在 $x_{-m}=0(m=1,2,\cdots)$ 条件下进行考虑，而且上述导数又是文[2]中的严弱导数时，必有常（广义）数 C 使 $f(x)-g(x)=C$。

证。不失一般性可设 $g(x)\equiv(\cdots,0,\cdots,0,\cdots,\cdots,)$。且设 $y_{-m}\equiv0(m=1,2,\cdots)$。

(1) 首先考虑 y_0。若 y_0 仅依赖于 $x_k,k<k_0$ 则考虑下列第(2)步；若 y_0 还依赖于某些 $k\geqslant k_0$：即有（至少）二点 x，$\overline{x}$ 使 $x-\overline{x}=C\times1_{(k)}$（$C$ 表示实常数）但 $f(x)\neq f(\overline{x})$。设 k_1 是这些 k 的最大标号。这个 k_1 的存在是由于假设了 y_0 仅依赖于有限个 x_s。取 k_1 代替定义 2.1 中的 k_0，容易证明 $f(x)$ 实际上并

不真正依赖于 x_{k_1} 而变化，这是矛盾。

(2) 取 $f(x)-y_0(x)$ 代替(1)中的 $f(x)$ 进行同一推证，即得 y_1 也仅依赖于 x_k，$k<k_0$。

继此即可证得定理。

从上定理可见，文[2]中严弱导数具有其自身的意义，然其缺点是不能适用于处理类似于 δ 函数等的一类函数。本文所给出的导数定义完全适用于后种类型的函数，但(24)式却须加以变形始能成立。这种现象正说明了 δ 函数与通常实变函数存在着根本差异，文[1]的结果说明从积分观点看二者又可纳入同一处理方案，广义函数的 (GNL) 积分的意义即在于此。

下边将说明文[2]中严弱导数的作用。

§3. Taylor 展开

一个最简单的广义函数是 $y=f(x)$，$x=(\cdots,0,\cdots,0,x_0,x_1,\cdots,x_n,\cdots)$，严格写出即是

$$y=f(x)=\begin{cases}x, & \text{当 } x=(\cdots,0,\cdots,0,x_0,x_1,\cdots)\text{ 时}\\ 0, & \text{对其它的 } x。\end{cases} \tag{26}$$

因为我们仅限于在广义数域的集合 $E=\{x: x_{-m}=0\}$ 上进行考虑（这正象可把普通实变函数看作为平面上沿 x 轴上定义的一样），故(26)式的函数便是 $y=x$。注意在此定义域中进行研究时它的导数是实数 1，这一导数还是严弱导数。由此可见，对于研究类似于多项式的广义函数，必须采取严弱导数。本节以后的讨论中，将假定 $f(x)$ 是严弱可导的。且 $y_{-m}\equiv 0$，$m>1$。

定义 3.1 若对广义函数 $g(x)$ 存在广义严弱可导函数 $f(x)$ 使 $f(x)$ 的导数 $f'(x)=g(x)$，则称(不计常数) $f(x)-f(a)$ 是 $g(x)$ 的一个不定积分，记作

$$^{\bullet}\int_{a}^{x} g(z)dz = f(x) - f(a). \tag{27}$$

下边建立分部积分法。

定理 3.1 设 $u(x)$，$u(x)$为二严弱可导的广义函数，则下列公式成立

$$^{\bullet}\int_{a}^{x} u(z)v'(z)dz = u(z)v(z)\Big|_{a}^{x} - {}^{\bullet}\int_{a}^{x} v(z)u'(z)dz \tag{28}$$

其中假定右端•不定积分存在。

证。由文[2]定理 2.1，容易看出(28)两端的导数相等，且 $x=a$ 时左右两端相等。因此定理 3.1 即能由下列引理推出。

引理。设有严弱可导广义函数 $y=f(x)$，满足§2 开始时所作的那些假定，而且 $f'(x)\equiv 0$，则 $f(x)$ 必恒为常（广义）数。

证。设 $y=f(x)=(\cdots,y_{-m},\cdots,y_0,\cdots,y_n,\cdots)$，其中 $y_{-m}=0$，$m>1$。于是

（一）$y_0\equiv 0$。

设 $y_0=y_0(x_{n_1},\cdots,x_{n_l})$。其中 $n_1<n_2<\cdots n_l$，先证明 y_0 其实并不依 x_{n_1} 而变。实际上，因 $f(x)$ 是严弱可导从而也在本文定义 1.1 的意义下当取 $\delta_s=0$ $(s\neq n)$ 及 $\delta_{n_1}>0$ 时可导，如此 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 的最前一位将是

$$\left[\frac{y_0(x_{n_1},\cdots,x_{nl}+(\Delta x)_{nl})-y_0(x_{n_1},\cdots,x_{n_l})}{\Delta x}\right]\times 1_{(-n_l)} \tag{29}$$

由(29)即得

$$\frac{\partial y_0}{\partial x_{n_l}}\equiv 0, \tag{30}$$

因此明显看出 y_0 并不依 x_{n_l} 而变。同理即可证得 $y_0 \equiv C_0$，其中 C_0 为实常数。

（二）由（一）以及相同的推理方式又可得 $y_1 \equiv C_1$，C_1 为实常数。

根据数学归纳法即可得引理的推论，于是引理证毕。

建立了分部积分法（28）即不难推出下列

定理 3.2 设 $f(x)$ 有直到 $(n+1)$ 阶的严弱导数，则下列公式成立

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}$$

$$\cdot\int_a^x f^{(n+1)}(z)(x-z)^n dz \tag{31}$$

证。首先有

$$f(x) = f(a) + {}^{\bullet}\int_a^x f'(z)\,dz \tag{32}$$

其次，设 $F(x) = f'(y)(x-y)$ 时根据[2]中有关定理知 $F(x)$ 也严弱可导的（在 $f'(x)$ 严弱可导假定下），再由 $f(x)$ 及 $(x-a)$ 的严弱可导性，在(28)中命 $v(y) = f'(y)$ 及 $u(z) = x-z$ 即得

$${}^{\bullet}\int_a^x f'(z)\,dz = f'(a)(x-a) + {}^{\bullet}\int_a^x f''(z)(x-z)\,dz \tag{33}$$

继续同一推理即与古典分析完全相同的得到（31）式。

〈证毕〉

设对广义数 $z = (\cdots, z_{-m}, \cdots, z_0, \cdots, z_n, \cdots)$ 引入一种模 $|z|$，意义为：$|z| = \sup\limits_k \{|z_k|\}$。注意此时除去性质 $|z| < \infty$ 不必成立外 $|z|$ 具有普通实数绝对值的一些基本性质（即 $|-x| = |x|$，$|0| = 0$ 及 $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ 等），在此模数意义下 $|x_n| \to 0$

即是文[2]中的强收敛。

定理3.3 设 $z=f(x)$ 为具有一切阶严弱导数的广义函数，且存在实常数使 $|f^{(n+1)}(y)|<M$，则 $\frac{1}{n!}{}^{*}\int_a^x f^{(n+1)}(y)\,(y-a)^n\,dy \to 0$（文[2]中弱收敛意义下），只要左端 * 积分的每一位均是（多元）可微函数。于是在弱收敛（即按位收敛）意义下下列公式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)\,(x-a)^n \tag{34}$$

成立。

证。分作下列几步进行证明。

（一）估计 $(y-a)^n$ 第 l 位的绝对值。

设以 ζ_l 表其第 l 位。由于 ζ_l 仅与 $y-a$ 的前 l 位有关。记 $K_l=\max\limits_{0\leqslant s\leqslant l}\{|(y-a)_s|\}$ 于是一个最粗略的估计便是：

$$\zeta_l=[(x-\overline{x})^n]_l=\sum_{m_1+\cdots+m_n=l}[(x-\overline{x})_{m_1}\times(x-\overline{x})_{m_2}\times\cdots\times(x-\overline{x})_{m_n}],$$

$|\zeta_l|\leqslant[(l+1)k_l]^n$。式中 m_s 表非负整数。

（二）设 $f^{(n+1)}(y)=(\cdots,0,\cdots,0,\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_m,\cdots)$，则 $|\xi_m|\leqslant M$。

（三）估计 $\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(x)\,(x-\overline{x})^n$ 第 k 位的绝对值。

记该第 k 位为 η_k 时，显然是 $\eta_k=\frac{1}{n!}\sum\limits_{l+m=k}\xi_m\times\zeta_l$。从而就有 $|\eta_k|\leqslant\frac{1}{n!}\sum\limits_{l+m=k}|\xi_m|\cdot|\zeta_l|\leqslant\frac{1}{n!}\times M\times(k+1)\times$

$$\times[(k+1)K_k]^n \tag{35}$$

因此当 $n\to\infty$ 时 $|\eta_k|\to 0$。

（四）设广义函数 $\frac{1}{n!}{}^{\bullet}\int_a^x f^{(n+1)}(y)(y-a)^n dy$ 的第 s 位为 $\theta_s=\theta_s(x_0,\cdots,x_{n_s})$ 注意到所考虑的广义函数严弱可导，又有下列关系

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\theta_s}{\partial x_0}\eta_s\\ \cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\partial\theta_s}{\partial x_{n_s}}=\eta_{s-n_s}\end{cases}\tag{36}$$

由（36）并注意 $n_s\geqslant 0$ 及上述之（三），从多元函数微分中值定理容易推知

$$n\to\infty \text{ 时} \qquad \theta_s\to 0.$$

特别，若取 $x=\overline{x}$，则 $\frac{1}{n!}{}^{\bullet}\int_a^{\overline{x}} f^{(n+1)}(y)(\overline{x}-y)^n dy\to 0$ 由于 $\overline{x}$ 是任意的，从而定理得证。

注．上述（四）的证明用到某种收敛的一致性，但这由（三）之证明极易看出，不赘述。

§4 指数函数与对数函数

本节将对通常最常见的两类函数即指数函数与对数函数进行讨论，这里所讨论的只是一些最基本性质中的几个。

4.1 关于指数函数

试以下列级数定义广义指数函数 e^x：

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots\tag{37}$$

(37) 中右端是在前述的弱收敛意义下。

定理 4.1 级数 (37) 是收敛的。

证．设 $x=\sum_{n=0}^{\infty} x_n \times 1_{(n)}$ 试研究(37)的第 k 位。为此先计算 x^n 的第 k 位，记它为 $\xi_{k,n}$，于是显然有

$$\xi_{k,n}=\sum_{m_1+\cdots+m_n=k} x_{m_1}\times x_{m_2}\times\cdots\times x_{m_n}. \tag{38}$$

式中 m_s 表非负整数。

由 (38) 得

$$|\xi_{k,n}|\leqslant[(k+1)\max_{0<s<k}\{|x_s|\}]^n, \tag{39}$$

而 (37) 式右端级数第 k 位为

$$\xi_k=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\xi_{k,n}. \tag{40}$$

为了验证(40)的收敛性，根据(39)又只须证明下级数收敛：

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[(k+1)\mathrm{mnx}_{0<s<k}\{|x_s|\}]^n, \tag{41}$$

但这是显然的，(41)的和 $S=\exp[(k+1)\max_{0<s<k}\{|x_s|\}]$。

定理 4.2 公式

$$e^{x+y}=e^x\cdot e^y \tag{42}$$

恒成立。

证．只须证明 (26) 式左右两端，对任意的 k 其第 k 位相等。由定理 4.1，可见 x 与 y 固定时可选 N (自然数) 使

$\left|\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\right)_s\right|<\varepsilon$ 与 $\left|\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n!}y^n\right)_s\right|<\varepsilon$ 对 $s\leqslant k$ 成立。

其中$(z)_s$表示广义数 z 的第 s 位（它自然即是普通实数）。由

此明显推出$(e^x\cdot e^y)_k=\sum\limits_{l+m=k}(e^x)_l\times(e^y)_m=\sum\limits_{l+m=k}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\right)_l\times$
$\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\right)_m$

此即$(e^x\cdot e^y)_k=\left[\left(\sum\limits_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}(x+y)^m\right)\right]_k+M_\varepsilon$. 其中$M$是一常实数。让$N\to\infty$，则$M_\varepsilon\to 0$再由直接验算即得

$(e^x\cdot e^y)_k=(e^{x+y})_k$. （证完）

下边推广普通实数函数中的公式

$$(e^x)'=e^x.$$

定理4.3 公式

$$(e^x)'=e^x \tag{43}$$

恒成立，左端的导数是严弱导数。

证。分作下列几步。

（一）$(x^n)'=nx^{n-1}$仍成立，其中x是广义自变量且设$m\geqslant 1$时，$x_{-m}=0$，又n是自然数。

证略。

（二）设$f(x)=e^x$，则由（37）式得（此时公式$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$容易直接验证）：

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}[x^{n-1}+x^{n-2}(x+\Delta x)+\cdots+(x+\Delta x)^{n-1}] \tag{44}$$

不难直接验证（44）通项中的$x^{n-1}+x^{n-2}(x+\Delta x)+\cdots+(x+\Delta x)^{n-1}$弱收敛于$nx^{n-1}$（文[2]意义下）．记通项为$\xi_n$时，则其第$k$位$\xi_{n,k}$有下列估计：

$$\left|\xi_{n,k}\right|\leqslant\frac{1}{(n-1)!}[(k+1)K_k]^{n-1} \tag{45}$$

其中

$$K_k=\max\left\{\max_{s\leqslant k}\{|x_s|\},\max_{s\leqslant k}\{|x_s+(\Delta x)_s|\}\right\} \quad (46)$$

由（45），知 k 固定时（44）右端级数的第 k 位一致收敛。在文[2]意义下让 $\Delta x\to 0$ 即得 $f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=e^x$

（证毕）

4.2. 对数函数

首先证明下列引理

引理4.4. $x\neq y$ 时 $e^x\neq e^y$

证。取 k_0 使之合于

$$\begin{cases}k<k_0 \text{ 时 } x_k=y_k\\ x_{k_0}\neq y_{k_0}\end{cases} \quad (47)$$

于是 $x=z+x'$，$y=z+y'$，其中 $z=x_0\times 1_{(0)}+\cdots+x_{(k_0-1)}\times 1_{(k_0-1)}$，$x'=x''\times 1_{(k_0)}$，$y'=y''\times 1_{(k_0)}$。

根据定理 4.2，为证明引理 4.4 只须证明 $e^{x'}\neq e^{y'}$ 就行了。实际上，不妨设 $k_0>0$，

$$\begin{cases}e^{x'}=1+x'+\frac{1}{2!}x'^2+\cdots\\ e^{y'}=1+y'+\frac{1}{2!}y'^2+\cdots\end{cases} \quad (48)$$

由于（48）中 x'^2 以后各项及 y'^2 后各项是 $1_{(2k_0)}$ 以后数区的数，而 $e^{x'}$ 与 $e^{y'}$ 中第 k_0 位各是 x_{k_0} 与 y_{k_0}，由（47）第二式即知 $e^{x'}\neq e^{y'}$。 （证完）

引理4.5 方程 $e^y=x$ 对给定的 x 有解 y 的充要条件是 $x_0>0$。

证。由方程

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2!}y^2 + \cdots + \frac{1}{n!}y^n + \cdots \tag{49}$$

比较对应各位可得下列方程组：

$$\begin{cases} 1 + y_0 + \frac{1}{2!}y_0^2 + \cdots + \frac{1}{n!}y_0^n + \cdots = x_0 \\ y_1 + y_0y_1 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}y_0^{n-1}y_1 + \cdots = x_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_k + y_0y_k + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}y_0^{n-1}y_k + \cdots + \Sigma_k = x_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{50}$$

(50) 式中符号 Σ_k 表以示以 y_1，y_2，……y_{k-1}为变元的某多项式。(50) 式可变形为：

$$\begin{cases} e^{y_0} = x_0 \\ y_1e^{y_0} = x_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_ke^{y_0} + \Sigma_k = x_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{51}$$

由式 (51) 显见，若方程 $e^y = x$ 可解则 $x_0 > 0$；反之若 $x_0 > 0$，则 y_0 可由 (51) 第一式定出，然后代入第二式又解得 y_1，再代入第三式解得 y_2，…。由是引理得证。

由这一证明也可看出解 y 若存在，则解也必是唯一地，因此立即可得：当 x 取纯实数时 y 必也是纯实数。这最后结果也容易由 (51) 式直接看出来，实际上，由 $x_1 = 0$及 (51) 的第二式得 $y_1 = 0$ 从而 $\Sigma_2 = 0$，又从 (51) 的第三式得 $y_2 = 0$，

于是也有 $\Sigma_3=0$；……。继此可知 y 必是普通实数。

上述这些结果乃属所预料者。

定义 4.1 设 $e^y=x$，y 即称作是 x 以 e 为底的（自然）对数函数。记作 $y=\ln x$。

由前所述，可见 $\ln x$ 的定义域为 $x_0>0$。

和普通实变函数一样，有下列推广了的

定理 4.5 在文［2］的意义下 $\ln x$ 严弱可导，且有 $(\ln x)'=\frac{1}{x}$。

证。由文［2］，及 $e^{\ln x}=x$，对两端求导即得定理之证明。

定理 4.6 下列展开公成仍成立

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots \tag{52}$$

其中 $|x|<1$；（模 $|x|$ 的定义见定理 3.3）。

证。分作下列几步。

（一）公式 $\left[\left(\frac{1}{1+x}\right)^n\right]'=\frac{-n}{(1+x)^{n+1}}$ 成立。

实际上，设 $y=\left(\frac{1}{1+x}\right)^n$ 则 $y(1+x)^n=1$，将其两端求导即得。详细的严格证明此地从略。

（二）由（一）及 Taylor 公式（31），取 $a=1\times 1_{(0)}=1$，得

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+(-1)^n\times$$
$$\int_0^x\frac{x^n}{(1+x)^{n+1}}dx \tag{53}$$

（三）可以验证 $n\to\infty$ 时在文［2］弱收敛（即按位收敛）的意义下（53）中不定积分的每一位对 $|x|\leq 1-\delta$（$\delta>0$）

一致的收敛于0。由此即可证得定理4.6，详细验证较烦，这里就从略了。 （证毕）

从定理4.2，引理4.4等容易证得。

定理4.7 公式 $\ln(x\cdot y)=\ln x+\ln y$ 成立。

另外有 $\ln 1=0$ 等等（这里的"1"即实数 $1\times 1_{(0)}$），这些习知的初等性质此处一律从略。

参考文献

[1] 王成堂：《广义数及其应用（1）》，《中国科学》，1979年数学专辑（1），1-11。

[2] 王成堂、湛垦华：《广义函数的连续性、导数及中值定理》，《西北大学学报》自然科学版1980年第2期。

(GNS) FUNCTIONS DEFINED BY(GNS) POWER SERIES

Wang Shu-tang, Zhan Ken-hua

Abstract

In the present paper we first define dindefinite integrals for (GNS) functions, so an explicite exprssion of the Heaviside function based on (GNS) is obtained. Secondly, the Taylor development of a (GNS) function is investigated. we introduce the generalized exponential function e^x and the logarithmic function lnx, the ordinary basic properties of them are also obtained.

广 义 层 次 空 间*

湛垦华　王戌堂

摘　要

本文以广义数为基础提出广义层次空间概念以反映多层次的物理世界，并对近代物理中的发散困难提供出了一种处理看法。

(一)

我们所面对的物理世界，是一个多层次的物理世界，这已为人们越来越深刻地认识到。

数学，是从物理模型中抽象出来的。建立在实数基础上的数学分析方法，本质上反映且适用于描述宏观的物理现象，这种数学方法的特点就在于所碰到的物理量永远存在于宏观这一个层次。多年来，人们过分夸大了这一个层次的数学方法

*）本文发表于《西北大学学报》自然科学版1980年第2期。

的意义，在数学上所谓一个点即被理解为一个不可分割的存在，而将超出这一层的大量则又统统命名为“无穷大”这一绝对物，并实际上把它排斥于考虑之外。

自然科学的发展，不断对这种形而上学的论点进行冲击。由于量子力学的发展，在物理中出现了类似于 Dirac-δ 函数的这种非寻常意义下的函数关系，就是一个显明的例证。

δ 函数提出后，多年来得不到数学家的承认，这是因为一个在原点 $x=0$ 取值为∞，而其余部分取值恒为零的函数 $\delta(x)$，无论从 Riemann 积分或从 Lebesgue 积分看来，积分值都应等于零的原故。L. Schwartz 提出（1950）的分布论，虽给出了某种可行的数学方法，然而却是（也仅仅是）将 δ 函数看作基本空间的泛函，我们认为，上述这一矛盾所出现的事实，恰好说明了实数仅是多层次宇宙中一个层次的量，而 δ 函数所出现的情况，正是反映了不同层次之间量的运算关系，若仅限于在一个层次中来考虑多层次宇宙中的物理量，当然就会出现不能解决的矛盾。

要正确地从数学上定量描述我们所面对的多层次物理世界，必须有一整套新的数学方法。当然，这一套新的数学方法，一定会利用已较成熟的宏观层次中实数运算作为其发展的基石，但肯定会加进许多新的因素，导出一系列新的规律。至今为止，人们已作了许多种探索，“非标准分析方法”就是人们现在较为普遍采用的一种，它从数理逻辑上证明了实无穷的存在性。

为了正确地描述多层次物理世界的实际，我们尝试着在文献［1］、［2］所提供的“广义数”的数学理论基础上，来建立起一种“广义层次空间”的物理概念，在本文中初步讨论了

在此空间中物理量的性质，和层次间的连络关系，最后，作为一个运用实例，从广义层次空间的概念与运算方法出发，初步讨论了量子场论中的 Dirac 场的发散困难。

我们深知，我们正在进行的工作是一个数学物理体系的开始性起步工作，一方面必须在我们已建立的“广义数”数学理论基础上发展数学理论，另方面还必须在“广义层次空间”的框架下来研究各种物理实际。摆在我们面前的任务是艰巨而诱人的，在发展过程中，肯定会不断地自我扬弃，也希望学术界的朋友们指出错误，以求改进。

(二)

我们的“广义层次空间”设想，是在文献[1]、[2]“广义数”数学理论基础上发展起来的，但对它作了某些扩展与改形。

1. 让我们考虑如下（向两端均无限延伸的）实数列

$$x=\sum_k x_k\times 1_{(k)}=(\cdots,\ x_{-i}\cdots,\ x_0,\ \cdots x_j,\ \cdots)\quad (1)$$

及

$$y=\sum_k y_k\times 1_{(k)}=(\cdots,\ y_{-i},\ \cdots y_0,\ \cdots y_j,\ \cdots)\ ,\quad (2)$$

其中 i 和 j 均为自然数（或说其中 k 可正，可负，也可以是数0），且只有有限个 i 使 $x_{-i}\neq 0$。

两个列 x 和 y 的顺序按字典式，即从前向后看，第一个使 $x_k\neq y_k$ 的脚标设为 k_0，且 $x_{k_0}<y_{k_0}$，即说 $x<y$。

将上述列中每一 k 项作为一个数区，第 0 项命名为第 0 数区，第 1 项命名为第一数区，…。这样，普通的实数只相当于其中一个数区，而多数区量则是实数的推广。

$1_{(k)}$为第 k 个数区的单位量，定义为

$$1_{(k)}=(\cdots,\ 0,\ \cdots,\ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{第}k\text{位}}}{1},\ 0,\ \cdots) \tag{3}$$

当 $k\neq k'$ 时，$1_{(k)}$与$1_{(k')}$分别处于不同数区，且分别是所处数区的1。

2．设 c 为实数，定义

$$cx=(\cdots,\ cx_{-i},\ \cdots,\ cx_0,\ \cdots,\ cx_j,\ \cdots) \tag{4}$$

定义加、减法为

$$1_{(i)}\pm 1_{(j)}=(\cdots,\ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{第}i\text{位}}}{1},\ \cdots,\ 0,\ \cdots,\ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{第}j\text{位}}}{1},\ \cdots) \tag{5}$$

$$x\pm y=(\cdots,\ x_{-j}\pm y_{-j},\ \cdots,\ x_i\pm y_i,\ \cdots) \tag{6}$$

定义乘法为

$$1_{(i)}\times 1_{(j)}=1_{(i+j)} \tag{7}$$

$$x\cdot y=\sum_k\sum_{i+j=k}(x_i\cdot y_j)\times 1_{(k)} \tag{8}$$

除法是乘法的逆运算。

定义了上述运算的列 x 之集合，称为广义数系统，x 称为广义数。每一数区 I_n（n是整数）与实数具有相同构造（不计单位）。

3．满足上述1．2定义的每个数区，我们看为是一个物理层次空间，多个数区的集合就构成了有多个物理层次空间的集合，我们把这个集合，称为广义层次空间。

比如，我们把0数区称为宏观层次，第1数区称为第一微观层次，第2数区称为第二微观层次，等等；把第（－1）数区称为第一宇观层次，第（－2）数区称为第二宇观层次，等等。这样多个层次的集合，我们就称为描述真实宇宙的广义层

次空间。

当我们把广义层次空间的每一层次，均取为 $(x、y、z)$ 的三维牛顿物理空间，就得到一个三维牛顿物理广义层次空间。

当我们把广义层次空间的每一层次，均取为 $(x,y,z;t)$ 四维相对论性空间时，我们就得到一个四维的相对论性广义层次空间。

当我们把广义层次空间的每一层次，均取为希尔伯特空间时，我们就得到一个希尔伯特广义层次空间。

如此等等

4．为了研究方便，我们把观察者所在的层次命名为观察者层次，以后总把第0层次取为观察者层次，即真实宇宙中的宏观层次。把被观察对象所在的层次命名为观察层次，或主导层次。

按我们的定义，一般说来，在广义层次空间中，我们所研究的物理量，除具有所处的主导层次量之外，在它的下面层次中还存在下面层次的余量。比如，被观察对象在0层次，其量为 x，它除了在此层次中有一物理量 x_0 之外，在下面的层次应有 x_1，$x_2\cdots$，等量，具体的写此物理量为

$$x=(\cdots,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots) \qquad (9)$$

有时为了突出研究主导层次的物理量，而略去下面层次的量值时，可把物理量写为

$$x=(\cdots,\ 0,\ x_i,\ 0,\ \cdots)$$

x_i称为主导量。

5．广义层次空间中的物理量应分为两种类型，一为与空间直接有关量，即显示关系量（简称显示量），一为与空间非

直接有关量。与空间非直接有关量又可分为两种，一为完全无关量，一为间接有关量，或隐示关系量（简称隐示量）。

在不同性质的广义层次空间中，各种物理量与空间的显示或隐示关系是不同的。

比如，在三维牛顿物理广义层次空间中，位置（x、y、z），体积 V 等是与空间直接有关的物理量，而时间 t 与空间就是非直接有关量。而在相对论性广义层次空间中，时间 t 就显然变成一个与空间直接有关的物理量。

有时，某一物理量在一个特定广义层次空间中各层次间其数值均相等，我们把这种物理量，称为穿透物理量（简称穿透量）。比如在相对论性广义层次空间中，光速 C 就是一个穿透量。

（三）

下面我们专门讨论层次间的物理量的连络关系。

文献〔3〕中，曾引入了一个层次间连络关系，即"过渡方程"：

$$(x+A_1)\times 1_{(1)}=x+\delta_{(0)} \tag{11}$$

认为某一物理量在两层次间的连络，是无穷大与无穷小的关系。其中$1_{(1)}$表第一数区的单位数，第一数区为 A_1 表达的量（一般 A_1 是一无限大表达式）填满，才能产生出被观察量。x 为被观察量值。$\delta_{(0)}$表示第0数区引入的形式无限小符号，它保证 $x=0$ 时，过渡方程仍有效。

在这里，我们把它进一步扩展。

我们定义两层次间，同一物理量间的连络关系为

$$y=F(x)，或 y\times 1_{(1)}=F[x\times 1_{(i)}] \tag{12}$$

其物理含义为，若把某一层次的某物理量观察值表为 x，当把它换算到另一个层次时其量为 y，它们中间的关系为 $y=F(x)$ 函数关系。

层次间的连络关系是可以传递的。若第一层次与第二层次间的连络关系为 $y=f(x)$，第二层次与第三层次间的连络关系为 $z=F(y)$，则第一层次和第三层次之间的连络关系为

$$z=F(y)=F[f(x)], \tag{13}$$

我们所研究的物理世界对象不同，其广义层次空间的含义也就有区别，从而其层次连络关系函数也就表现出不同的形式。

2．作为层次连络函数关系的例子，可举出下列几种。

①倍数关系

同一物理量在两层之间的连络关系，是成一倍数的，写为

$$y=kx \tag{14}$$

其中 k 为一常系数。

②平移关系

三维牛顿物理广义层次空间中的伽俐略变换关系就是其中之一。

同一物理量在两层次间的连络关系写为

$$y=A+x, \tag{15}$$

其中 A 可以有

$$A=\begin{cases}\infty \text{（无限数）}\\ a\times 1_n \text{（}a\text{ 为有限数）}\end{cases}$$

请注意，由于一个广义数的数区划分并未把所有层次均包括无遗，这里的∞，正像坐标纸的非格子点处区域一样，总还存在某种范围的空挡，然而，在某一具体问题中，它也被认为是一

个确定值。

当$A=0$时，即$y=x$，此时两层次变为同一层次。

③倍数加平移关系

同一物理量在两层次间的连络关系写为

$$y=A+kx \qquad (17)$$

在今后我们讨论广义层次空间中的群元变换时，这是很有用的。

（四）

作为广义层次空间物理应用的实例，我们下面初步讨论量子场论中Dirac场的发散困难。

在Dirac的$\frac{1}{2}$自旋场中，Dirac假定"真空是为一切负能级粒子所填满而又没有正能级粒子的情态。"

文献〔3〕中用下列"过渡方程"来代替Dirac假定，过渡方程为

$$(x+A_1)\times 1_{(1)}=x+\delta_{(0)}$$

此方程所定义的关系，将不同数区的物理量联系起来了，它是随广义数而引入的一种运算方法。其实质，不过是Dirac假定的一种数学表达而已，并未引入新的物理概念。按〔3〕的说法，这是"无法从理论推导出来，正确性全靠实践的考验"。〔3〕认为其"所定义的广义数并未将数的扩充达到完备无隙的境地"，"A的决定一般还须借助于物理方面的考虑。"

其实，正如前面讨论连络关系时已谈到的，从广义层次空间的角度看来，过渡方程可理解为一种广义的坐标平移连络方

程，其实质与牛顿力学的伽俐略变换类似，只不过是取不同观测坐标采用的一种坐标系统平移方法。但它们的区别在于，伽俐略变换其物理含义只限于同一空间层次，其数学运算只在同一个数区进行，而广义坐标平移方程其物理含义是在广义层次空间中层次间的连络，其数学运算在不同数区之间进行，它本质上应包括了同一层次（同一数区）中的伽俐略变换。

但是，为更便于运算和阐明物理含义，有必要把〔3〕所定义的过渡方程改造如下。

1。相对概率．首先将对易关系取为

$$\left.\begin{aligned}\{a_{\zeta}^{*},\ a_{\zeta'}\} &= \delta_{\zeta,\zeta'} \times 1_{(1)} \\ \{b_{\zeta}^{*},\ b_{\zeta'}\} &= \delta_{\zeta,\zeta'} \times 1_{(1)}\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$|>_0$ 表示真空态矢，于是存在一个粒子（正粒子）的态矢将应该是 $a_{\zeta}^{*}|>_0$，考虑算符

$$N_{\zeta'}^{(*)} = a_{\zeta'}^{*} a_{\zeta'} \times 1_{(-1)}, \tag{19}$$

于是

$$\begin{aligned} N_{\zeta}^{(*)} a^{*}|>_0 &= a_{\zeta'}^{*} a_{\zeta'} a_{\zeta}^{*} \times 1_{(-1)}|>_0 \\ &= a_{\zeta'}^{*} a_{\zeta}^{*} a_{\zeta'} \times 1_{(-1)}|>_0 + a_{\zeta'}^{*} \delta_{\zeta,\zeta'} \times 1_{(1)} \times 1_{(1)}|>_0 \\ &= a_{\zeta'}^{*} \delta_{\zeta,\zeta'}|>_0 \\ &= a_{\zeta}^{*}|>_0, \end{aligned} \tag{20}$$

因此，上述算符 $N_{\zeta'}^{(*)}$ 表示粒子数算符。

另外，假定只有一个稳定（以 ξ 表示的）自由粒子 a_{ζ} 时，其一级微扰量应是

$${}_0\!<1 a_{\zeta'} a_{\zeta}^{*} 1>_0 = \sigma_{\zeta,\zeta'} \times 1_{(1)} \tag{21}$$

但实际上其右端应当等于 $\delta_{\zeta\zeta'}$ 这是数学中的“条件概率”问题，由我们的计算过渡到实际观测值，应进行重新归一化。

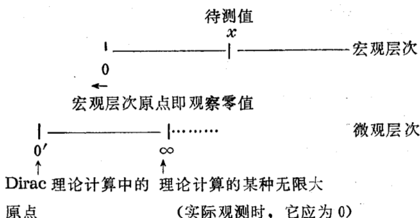
同理，今后在各级微扰中，也都有同样的重新归一化问题。

2．今后等式中所出现的∞，都应是具体的表达式，它代

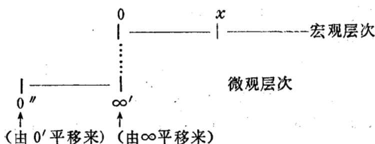
表（包括无限大层次在内）广义层次中的某一固定点，因此

$$\infty + a = \infty \tag{22}$$

其中 a 是普遍有限数值，不再成立．为了将理论计算值和实际（应仅限于观察者所处的宏观层次，即普通实数）观测值相比较，就须将这种∞（注意，它是广义层次空间的某一固定点）平移至宏观层次的坐标原点，如图所示。



（一）平移前



（二）平移后

此时，数学公式可重新表示为

$$y = \infty + x \to x \tag{23}$$

3。将平移后的 x，根据重新归一化的效果，又变为

$$x \to \frac{x}{1_{(1)}} = x1_{(-1)} \tag{24}$$

其中注意，左端的x实际是微观层次的某个量，因此右端即是普通实数。

4. 今后各级微扰都采用上述方法而逐一处理，结果就得到通常量子场论中微扰论加以重整化后得到的结果。

具体运算实例，我们将在另文中讨论。

请注意上述的∞不一定就是我们所引入的各个层次的端点$1_{(-m)}$，它可能居于某两层次之间，这并不影响理论的严密性，正像笛卡尔坐标中的格子点与一般点之间的关系一样。

本文曾在1979年11月于苏州举行的“中国引力与相对论天体物理学会第一届代表大会”上报告，得到了许多与会同志的热情鼓励，并提出了一些宝贵建议，在此一并致谢。

参 考 文 献

[1] 王成堂：《广义数及其应用（I）》，《中国科学》，1979年数学专辑（I），第1～11页。

[2] 王成堂、湛垦华：《广义函数的连续性、导数及中值定理》，《西北大学学报》（自然科学版），1980年第2期。

[3] 王成堂：《广义数及其应用（II）》，《西北大学学报》（自然科学版），1979年第1期。

SPACES OF GENERALIZED LEVELS

Zhan Ken-hua, Wang Shu-tang

Abstract

Based on generalized number field, we introduce in

this paper the concept of "space of generalized levels". This concept will reflect the multi-level of the physics world. The divergent difficulties occured in modern theoritic physics are viewed by the above concept.

广义数在量子统计学中的应用*

马秀清　王戌堂

摘　要

文献[1]中曾引入广义数系统，本文将广义数系统应用于量子统计中。首先澄清了吉卜斯以来关于热力学极限过渡这个“糊涂不清”的概念。并对波色-爱因斯坦气体在临界点附近分子数密度的“无限大涨落”的计算结果进行了讨论，应用广义数处理，这个涨落不是宏观的无限大，而应是有限的，从而取得了与观察事实相符合的结果。

在物理学中我们常常遇到发散的计算结果，为了克服这些“发散困难”，本文作者之一王戌堂在文献[1]中建立了广义数系统，这个新的数学理论本质上不同于非标准量分析。把

* 本文发表于《西北大学学报》（自然科学版）1983年第1期。

这个数学理论应用于理论物理，我们能得到一系列有实质意义的结果。

（一）广义数的基本概念

设 x 表示一个实数列：

$$x=(\cdots,x_{-m},\cdots x_0,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots)$$

其中 m、n 是非负整数以及只有有限个 m 满足

$$x_{-m}\neq 0$$

1．基本定义

设 x，y 为两个不同的实数列：

$$x=(\cdots,x_{-m},\ \cdots x_0,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots,\ )$$

$$y=(\cdots,y_{-m},\ \cdots,\ y_0,\ \cdots,\ y_n,\ \cdots)$$

则加，减法定义为：

$$x\pm y=(\cdots,\ x_{-m}\pm y_{-m},\ \cdots,\ x_0\pm y_0,\cdots,x_n\pm y_n,\cdots)$$

x 和 y 的顺序以字典方式排列。

2．如果 c 是一个实数，则 cx 被定义为：

$$cx=(\cdots,cx_{-m},\cdots,cx_0,\cdots,cx_n,\cdots)$$

设 $1_{(k)}$ 为第 k 个数区的单位量：

$$I_{(k)}=(\cdots,0,\cdots,0,\cdots\underset{\substack{\uparrow\\ \text{第 }k\text{ 项}}}{1},\cdots,0,\cdots)$$

其中，k 可以是正、负或零。

3．乘法的定义：

$$1_{(m)}\times 1_{(n)}=1_{(m+n)}$$

$$x \cdot y = \sum_{k} \left[\sum_{m+n=k} (x_m \cdot y_n) \right] \times 1_{(k)}$$

其中 m、n 和 k 是整数。

4．除法的定义

如果 x、y 和 z 有下面的关系

$$y \cdot z = x$$

则 z 就叫做商 $\frac{x}{y}$。

5．广义数系统的定义

定义了上述运算的数列的集合叫广义数系统，以及

$$x = \sum_{k} x_k \times 1_k$$ 叫做广义数。

显然广义数系统是一个有序域，所有实数的运算法则在这里仍然成立。x 的每一项表示一个数区，每个数区与实数是同构的。不同数区间的量的关系是无限大或无限小的关系。

（二）分层次的物理世界，分层次的物理量

宇观、宏观和微观是迄今为止人们对物理世界划分的三个主要的层次。建立在各个层次上的物理学，有着不同的研究对象，从不同的方面反映物质的运动规律。描述物理基本属性及状态的物理量，也相应地划分层次。例如：大量分子组成的宏观系的质量 M，一个分子质量 m；一个宏观带电体所带的电量 Q，一个离子带电量 q；一个宏观容器中气体的体积 V，一个分子平均占的体积 v 等等。这里 V、Q 和 M 是宏观量而 v、q 和 m 是微观量。

对于宏观量，人们是从不考虑量子化的。例如，一个宏观任意形状的均匀带电体，人们毫无争议地认为电荷在它上面是连续分布的。可是从微观层去看电量是量子化的。一个离子的电量应是：

$q=ne$，　　n 为整数，e 是一个电子电量的大小。

在处理宏观问题时，常常是在连续的概念上去应用原理和定律。例如：求电荷均匀分布的宏观带电体的周围空间中某一点 P 的电场强度 $\vec{E}$。我们总是分成无限多个点电荷 dQ，先求 dQ 在 P 的 $d\vec{E}$ 再进行迭加：　$\vec{E}=\int d\vec{E}$

宏观的点电荷 dQ，首先它是一个无法分辨其轮廓的"点"，其次又是一个无限小的电量。即体积、电量都是无限小。但是从微观去看它有电量就必定是 e 的整数倍，它是带电体就必定有一定的线度，即使一个电子线度也不为零（$10^{-17}m$ 以下）。这就是说宏观层次的无限小的量，在微观层次成了有限值。

热力学极限过度，又是在微观层次把宏观层次的有限值 V（体积）N（分子数）看成无限大，极限过渡时总是 $N\to\infty$，$V\to\infty$，而一个分子平均占的体积看做有限值。

这就给人们以启示，对于迭加型标量，不同层次间的关系是有限与无限大（或无限小）的关系。

（三）关于热力学极限过渡

对于多层次的物理世界，不同层次间物理量的运算关系，长期以来没有恰当而严密的数学方法，Dirac 的 δ 函数虽然反映了不同层次间物理量的关系，但人们对它又缺乏自然而清晰的理解。广义数系统建立后，对 δ 函数获得了清晰的自然的理解。同时，使物理中经常使用的热力学极限过渡，也有了严格

的理论基础。

1．过去人们对热力学极限过渡（$V\to\infty$，$N\to\infty$）的认识

H. H 波戈留波夫在文献［2］说过："应当着重指出一个显然的情况：一般在统计物理学中，考虑宏观系统，在宏观系统里分子数 N 非常大，而系统的体积 V 的线度量和厚度的自然单位——分子的有效直径——相比也非常大，很明显，把这些所谓的'非常大'的'糊涂不清'的概念加以数学处理时，我们必须进行极限过渡：$N\to\infty$，$V\to\infty$。当年吉卜斯（Gibbs）就曾经指出过这个极限过渡的必要性，而且事实在他的关于各种宏观系统（如气体、液体）的研究中，他一直应用这个极限过渡。"

吉卜斯以来，越来越多的人也一直使用这个极限过渡，使用的同时又认为这是"糊涂不清"的。有数学常识的人都知道"非常大"与"无限大"是两个截然不同的概念。

2．有了广义数系统后我们的看法

如果总局限于一个物理层次，仅限于一个数区来考虑实数，对于这个极限过渡就会总是"糊涂不清"的。

如果应用广义数的概念，明确宏观系统的体积 V 是一个宏观量，设它取第 0 数区的一个实数 $V\times1_{(0)}$；每个分子平均占的体积 v 是一个微观量它取第一数区的一个实数 $v\times1_{1}$；N 反映同一个物理量体积的不同层次间的联络，在数学上反映了不同数区间的过渡，（这时，应作为取自第一级无限大数区的数）

$$V\times1_{(0)}=Nv\times1_{(1)}$$

在数学上看不同数区的数就是有限与无限大（或无限小）

的关系；在物理上考虑就是当我们在微观研究问题时，认为分子体积是有限值时，这时宏观系统的体积就成了无限大；当我们在宏观研究问题时，认为系统的体积是有限值时，分子就是没有轮廓的“点子”，它的体积就是无限小。站在宏观看宇观，宇观中的（有限的）系统的体积就成了无限大。

数学上引入广义数系统后，热力学极限过渡就不是“糊涂不清”了，而有了严格的数学理论基础。同时，用了热力学极限过渡而得到的与观察事实相符合的结果，也间接证实了广义数理论的正确性。那么，某些用了热力学极限过渡但与观察事实不相符合的理论结果又是怎么回事呢？

（四）关于波色-爱因斯坦气体分子数密度在临界点附近的“无限大涨落”

波色-爱因斯坦气体是由全同粒子组成的宏观系统，这些粒子服从波色统计律，而且它们之间的相互作用很小。

假定分子数 N 固定，体积是 V，其中一个小区域 $G(\ll V)$ $G\gg v$（分子平均占的体积），G 内的分子数是一个迭加型力学量

$$n_G=\sum_{1<j<N}f_G(q_j)\quad 其中\ f_G(q)=\begin{cases}1 & (q\ 在\ G\ 内)\\ 0 & (q\ 不在\ G\ 内)\end{cases}$$

G 中分子数涨落：

$$\overline{(n_G-\overline{n_G})^2}=n_G\left\{1+\frac{1}{v}\int[F_2(q)-1]dq\right\} \tag{1}$$

其中 $\overline{n_G}=\dfrac{G}{V}N$，$F_2(q)=V^2R_2(t,q_1,q_2;\ q_1q_2)=V^2Sp\rho$
$(3\cdots N)$

$R_2(t,q_1,q_2;\ q_1,q_2)$ 是分子配容算符；ρ 为统计算符。当

$\tilde{F}_2(q)$ 为球对称时

$$\overline{(n_G-\overline{n_G})^2}=n_G\left\{1+\frac{4\pi}{v}\int_0^\infty r^2[g(r)-1]dr\right\} \qquad (2)$$

其中 $g(r)$ 为关联密度函数。

N 固定时，在统计平衡态，由二次量子化方法可推得配布数

$$n_f=\frac{1}{Ae^{\frac{E(t)}{\theta}}-1} \qquad (3)$$

1．原来的无限大涨落是怎么得出的？

把上述结果应用于单原子无自旋分子组成的波色-爱因斯坦气体（如氦）。设气体处在每边 $L=\sqrt[3]{V}$ 的正方体内，在边界上加周期条件

$$\varphi_f(q)=\frac{1}{\sqrt[3]{V}}e^{i(f,q)}$$

其中 $f^\alpha=\frac{2\pi}{L}n^\alpha$ 而 $\alpha=1,2,3$；$n^\alpha=0,\pm1,\pm2,\cdots$

显然 $E(f)=\frac{\bar{h}^2|f|^2}{2m}$

则 $n_f=\left\{A\exp\left(\frac{\bar{h}^2f^2}{2m\theta}\right)-1\right\}^{-1}$ (3′)

又∵ $n_f\geqslant0$ ∴ $A\geqslant1$。A 由方程

$$\sum_{(f)}\left\{A\exp\left(\frac{\bar{h}^2|f|^2}{2m\theta}\right)-1\right\}^{-1}=N \qquad (4)$$

来确定。

这里 A 有两种情况：

$$\begin{cases} A>1 \\ A\sim 1 \end{cases}$$

$A>1$ 时，$\overline{n_f}$ 是 f 的正规函数，故极限过渡非常简单只要（4）中的求和换成积分，即 $V\to\infty$ 时，"准动量" f 的谱趋于连续。

$\because\quad \Delta f=\Delta f^1\Delta f^2\Delta f^3=\left(\dfrac{2\pi}{V}\right)^3=\dfrac{(2\pi)^3}{V}$

$\therefore$　极限过渡之后（4）变成

$$\int\left\{A\exp\left(\frac{\overline{h}^2|f|^2}{2m\theta}\right)-1\right\}^{-1}df=\frac{(2\pi)^3}{V}N=\frac{(2\pi)^3}{v}\qquad(4')$$

$\because$　球对称又可成为

$$4\pi\int_0^\infty\left\{A\exp\left(\frac{\overline{h}^2|f|^2}{2m\theta}\right)-1\right\}^{-1}K^2\,dK=\frac{2\pi}{v}$$

或者

$$\int_0^\infty\frac{x^2}{Ae^{x^2}-1}\,dx=\frac{2\pi^2\overline{h}^3}{v(2m\theta)^{3/2}}\qquad(4'')$$

$\because$　$A>1$（4″）中的积分随 A 的减小而增大

$\therefore$　对于一定的 v，θ，只有

$\dfrac{2\pi^2\overline{h}^3}{v(2m\theta)^{3/2}}<\displaystyle\int_0^\infty\frac{x^2dx}{Ae^{x^2}-1}=\frac{\sqrt{\pi}}{4}2.612\cdots$ 时，A 才有解。

即 N 一定时，只有

$\theta>\theta_{临界}=\dfrac{\overline{h}^2}{2m}\left\{\dfrac{2\pi^2}{v\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}2.612}\right\}^{2/3}$ 才会有 $A>1$ 的情形。

在这种情形下，由二次量子化方法与统计算符法的关系（见[2]），可以得到

$$F_2(q_1,q_2;q_1,q_2)=1+\mu^2(|q_1-q_2|)$$

其中 $\mu(r)=\dfrac{v}{2\pi^2 r_0^3}\cdot\dfrac{1}{r/r_0}\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin\frac{r}{r_0}x}{Ae^{x^2}-1}dx \quad r_0=\frac{\overline{h}}{\sqrt{2m\theta}}$

关联密度函数 $g(r)=1+\mu^2(r)$

其中 $\dfrac{4\pi}{v}\displaystyle\int_0^\infty r^2[g(r)-1]dr=\frac{v}{(2\pi r_0)^3}\cdot 4\pi\int_0^\infty\frac{x^2dx}{(Ae^{x^2}-1)^2}$

可见 $A\to 1$ 时，$\overline{(n_g-\overline{n_g})^2}\to\infty$

对于 $A\sim 1$ 的情况，对 $|f|>0$ 的 f 经极限过渡之后

$$\overline{n_f}=\left\{\exp\frac{\overline{h}^2|f|^2}{2m\theta}-1\right\}^{-1}$$

同样可以证明这种情形在 $\theta<\theta_{临界}$ 时才会发生。

在坐标表象中统计算符：

$$(F_1)_{q,q'}=1-\left(\frac{\theta}{\theta_{临界}}\right)^{3/2}+\frac{V}{2\pi\overline{h}^3}\int\frac{\exp\frac{i}{\overline{h}}(p,q-q')}{\exp\left(\frac{p^2}{2m\theta}\right)-1}dp$$

从而可得高一级统计算符 $(F_2)_{q,q'}$，代入（1）也会得到

$$0<\theta<\theta_{临界}时，\overline{(n_q-\overline{n_q})^2}\to\infty$$

2．这个“无限大涨落”是与观察事实相矛盾的

因为假如是这样的，我们应该在临界点附近特别是在临界点以下的氦中观察到光的反常的散射，可是人们从来未见到氦中的这种反常的光的散射。

这个矛盾曾是在较严密量子统计理论上建立超流理论的障碍之一。

这个矛盾是怎么产生的呢？

3．我们的看法

检查以上的讨论，显然是在微观层次中进行的。从理论上

看没有与量子力学原理相违背，统计力学方面的推演，在数学上也没有什么原则性错误（用以往的数学理论检查）。

我们认为关键是忽略了物理层次，推演仅在广义数的一个数区中进行的。涨落现象，是在宏观表现出来的，即宏观现象。涨落的数值是一个宏观量，它没有对应的微观量，它是下一层次中分子运动的集体表现的一个描述。

4．用广义数处理

如果我们明确物理层次，以广义数理论划分明确的数区，设宏观量从第0数区取值，微观量为第1数区。则波色统计算符幅度的对易关系，用广义数写出：

$$b_f \times 1_{(1)} b'_f \times 1_{(1)} - b'_f \times 1_{(1)} b_f \times 1_{(1)} = 0$$

$$\overset{+}{b}_f \times 1_{(1)} \overset{+}{b'_f} \times 1_{(1)} - \overset{+}{b'_f} \times 1_{(1)} \overset{+}{b}_f \times 1_{(1)} = 0$$

$$b'_f \times 1_{(1)} \overset{+}{b}_f \times 1_{(1)} - \overset{+}{b}_f \times 1_{(1)} b'_f \times 1_{(1)} = \delta(f - f') \times 1_{(2)}$$

同理“量子化了的波函数”的对易关系为

$$\varphi(x) \times 1_{(1)} \varphi(x') \times 1_{(1)} - \varphi(x') \times 1_{(1)} \varphi(x) \times 1_{(1)} = 0$$

$$\overset{+}{\varphi}(x) \times 1_{(1)} \overset{+}{\varphi}(x') \times 1_{(1)} - \overset{+}{\varphi}(x') \times 1_{(1)} \overset{+}{\varphi}(x) \times 1_{(1)} = 0$$

$$\varphi(x) \times 1_{(1)} \overset{+}{\varphi}(x') \times 1_{(1)} - \overset{+}{\varphi}(x') \times 1_{(1)} \varphi(x) \times 1_{(1)} = \delta(x - x') \times 1_{(2)}$$

这样分子配容算符就成了

$$R_2 = \frac{1}{V^2 N(N-1)} \sum_{\begin{pmatrix} f_1, f_2 \\ f_1', f_2' \end{pmatrix}} b^+_{f_1} b^+_{f_2} b'_{f_2} b'_{f_1} \times I_{(4)} \dot{\varphi}_{f_1}(q_1') \dot{\varphi}_{f_2}(q_2') \varphi_{f_2'}(q_2) \varphi_{f_1'}(q_1)$$

统计算符 $F_2 = V^2 R_2$

又∵ $\overset{+}{b}_{f_1}\overset{+}{b}_{f_2}b_{f_2'}b_{f_1'}=\overline{n}_{f_1}\cdot\overline{n}_{f_2}$ ∴ 以广义数可以写成

$$\overset{+}{b}_{f_1}\overset{+}{b}_{f_2}b_{f_2'}b_{f_1'}\times I_{(4)}=\overline{n}_{f_1}\cdot\overline{n}_{f_2}\times I_{(4)}$$

$$\therefore\quad F_2=\frac{1}{N(N-1)}\sum_{(f_1,f_2)}\overline{n}_{f_1}\overline{n}_{f_2}\times I_{(4)}\{1+\exp[i(f_2-f_1,\ q_1-q_2)]\}$$

极限过渡之后 $F_2=1_{(4)}+\frac{v^2}{(2\pi)^6}\int\overline{n}_{f_1}\cdot\overline{n}_{f_2}I_{(4)}\exp[f_2-f_1,\ q_1-q_2)]df_1df_2$

$$F_2=1+u^2(|q_1-q_2|)$$

而 $$u(r)=\frac{v}{2\pi^2r_0^3}\frac{1}{r/r_0}\int_0^\infty\frac{x\sin\frac{r}{r_0}x}{Ae^{x^2}-1}dx\times 1_{(2)}$$

$$g(r)=1+u^2(r)$$

∴ (2)中的 $\frac{4\pi}{v}\int_0^\infty r^2[g(r)-1]dr$ 可变为

$$\frac{v}{(2\pi r_0)^3}\cdot 4\pi\int_0^\infty\frac{x^2dx}{(Ae^{x^2}-1)}\times I_{(4)}$$

由此式可见原来计算结果中的"∞"绝不是第0数区的无限大，即不是宏观层次的无限大，宏观层次应为有限值。因而应用广义数的数学理论来处理这个问题，就会取得与观察事实相符合的结果。

参考文献

[1] 王成堂：《广义数及其应用（1）》1979《中国科学》.

[2] H·H波戈留波夫著《量子统计学》（杨棨译）.

[3] 王竹溪：《统计物理学导论》.

THE GENERALIZED NUMBER SYSTEM AND ITS APPLICATION IN QUANTUM STATISTICAL MECHANICS

Ma Xiu-qing　　Wang Shu-tang

Abstract

A generalized number system is established in[1]. This paper test to apply the generalized number system to the quantum statistical mechanics. First of all, we have make sure a "muddy concept" , touching the thermodynamics limit transition from the time of Gibbs. On the other hand, we have discussed the "infinity great fluctuation" of molecular's number density for the Bose-Einstein gas. we gain the result, coinciding with observation's facts.

关于序数方程(II)*

王克显　　指导教师　王戌堂

摘　要

推广文 [3] 的结果，本文证明：

(1) 设$\gamma>1$，则当ξ，η，γ不同时为自然数时，方程$\xi^{\gamma}=\eta^{\gamma+1}+1$无解。

(2) 设$\gamma>1$，$\xi>1$，$\eta>0$和$\alpha>0$不同时为自然数，方程$\xi^{\gamma}\cdot\alpha=\eta^{\gamma+1}+1$。则当：

(i) γ是超限序数时无解；

(ii) γ是自然数，α和ξ不同时为孤立数时无解。

(iii) γ和$\alpha\neq 2$同是自然数时无解；

(iv) γ和η同是自然数时无解；

(v) γ，ξ和α是任意自然数时

*本文发表于《数学进展》第5卷第1期（1962）。

无解。

对于方程 $\xi^{\gamma}=\eta^{\gamma+1}$ 考虑了类似的问题。

§1

利用序数正常表示的唯一性[1]，M. Sierpinski[2]证明了方程 $\xi^2=\eta^3+1$ 没有超限的序数解，而方程 $\xi^2=\eta^3$ 则有超限序数解。王戍堂与作者[3]曾对前一方程进行了拓广，并对更广的一类序数方程的求解作了研究。本文的目的在于对［3］中的前两个定理与［2］中的方程 $\xi^2=\eta^3$ 进行拓广研究。

为读者便利起见，把［3］中的前两个定理写在下面：

定理 1′. 设 n 为一自然数，$n>1$，则方程

$$\xi^n=\eta^{n+1}+1$$

没有超限的序数解 ξ 和 η。

定理 2′. 若 m 为一自然数，则方程 $\xi^n\cdot m=\eta^{n+1}+1$ 当 $m\neq 2$ 时没有超限序数解。

§2

首先证明下列的

定理 1. 设 $\gamma>1$，ξ 和 η 是不等于零的序数，且 γ，ξ 和 η 不同时为自然数，则方程

$$\xi^{\gamma}=\eta^{\gamma+1}+1 \tag{1}$$

没有序数解 γ，ξ 和 η。

现在先证明下列辅助定理。

辅助定理. 若ξ是大于1的序数，γ是超限序数，则幂

$$\xi^{\gamma} \tag{2}$$

是第二类超限序数，

辅助定理的证明。根据书[4]中关于序数幂的结果（此处为了与前面统一起见适当地改变了书上的形式）我们有：

a) 设γ是第二类超限序数，ξ为超限序数，其正常表示式为

$$\gamma=\omega^{\delta_1}d_1+\omega^{\delta_2}d_2+\cdots+\omega^{\delta_{p-1}}d_{p-1}+\omega^{\delta_p}d_p, \tag{3}$$

$$\xi=\omega^{\alpha_1}a_1+\omega^{\alpha_2}a_2+\cdots+\omega^{\alpha_{k-1}}a_{k-1}+\omega^{\alpha_k}a_k, \tag{4}$$

其中$\gamma\geqslant\delta_1>\delta_2>\cdots>\delta_p>0$，$\xi\geqslant\alpha_1>\alpha_2>\cdots>\alpha_{k-1}>\alpha_k\geqslant0$；$d_1$，$d_2$，…，$d_{p-1}$，$d_p$及$a_1$，$a_2$，…，$a_{k-1}$，$a_k$各为自然数。则

$$\xi^{\gamma}=(\omega^{\alpha_1}a_1+\omega^{\alpha_2}a_2+\cdots+\omega^{\alpha_k}a_k)^{\gamma}=\omega^{\alpha_1\cdot\gamma}. \tag{5}$$

b) 设γ是第一类超限序数（此时$\delta_p=0$），ξ是超限序数，且令

$$\omega^{\delta_1}d_1+\omega^{\delta_2}d_2+\cdots+\omega^{\delta_{p-1}}d_{p-1}=\tau,$$

则

$$\xi^{\gamma}=\xi^{\tau+d_p}=\xi^{\tau}\cdot\xi^{d_p}. \tag{6}$$

由[3]中容易了解ξ^{d_p}的展开式依ξ是某一类超限序数就是某一类超限序数。

c) 设$\xi>1$是自然数而γ是第二类超限序数$\gamma=\omega x$，则

$$\xi^{\gamma}=\xi^{\omega x}=(\xi^{\omega})^{x}=\omega^{x}. \tag{7}$$

若γ是第一类超限序数$\gamma=\omega x+d_p$，则

$$\xi^{\gamma}=\xi^{\omega x+d_p}=\xi^{\omega x}\cdot\xi^{d_p}=\omega^{x}\cdot\xi^{d_p}. \tag{8}$$

按照第二类超限序数的意义，容易了解a)，b)，c)中的ξ^{γ}是第二类超限序数，于是辅助定理证明。

定理 1 的证明．由定理 1′和辅助定理的证明可知，当 $\xi>1$ 时若 γ 和 ξ （或者 η）是自然数，则 (1) 中的 η(或者 ξ) 必需是自然数．这与假定 γ, ξ 和 η 不同时为自然数相矛盾．又当 ξ （或者 η）是 1 而 γ 是序数时 (1) 中的 η 等于零（或者 $\xi^{\gamma}=2$, 即 ξ, γ 应都是自然数）；这亦与假定矛盾．从而定理 1 得到证明．

由辅助定理可知，对于任意序数 $\xi>1$, $\alpha>0$ 及超限序数 γ，序数

$$\xi^{\gamma}\cdot\alpha \tag{9}$$

都是第二类超限序数．

实际上根据 [3] 中超限序数展开式的运算，任何一个第二类超限序数乘以一个大于零的序数之积亦是第二类超限序数．

对应着定理 2′，由上又可以证明

定理 2．设 $\gamma>1$, $\xi>1$. $\eta>0$ 和 $\alpha>0$ 是序数且不同时为自然数，则方程

$$\xi^{\gamma}\cdot\alpha=\eta^{\gamma+1}+1 \tag{10}$$

当 (i) γ 是超限序数时无解；

(ii) γ 是自然数而 α 和 ξ 是不同时属于第一类的超限序数时无解；

(iii) γ 和 $\alpha\neq2$ 是自然数时无解；

(iv) γ 和 η 是自然数时无解；

(v) γ, ξ 和 α 是自然数时无解．

定理 2 的证明：

(i) 由 (9) 立得．

(ii) 因为 α 和 ξ 不同时为第一类超限序数，所以 $\xi^{\gamma}\cdot\alpha$ 就

是第二类超限序数，则与 $\eta^{\gamma+1}+1$ 是第一类超限序数矛盾。

(iii) 当 ξ 是超限序数时由 (10) 推出 η 是超限序数，因之利用定理2′即见 (10) 无解。

当 ξ 是自然数时 η 是自然数，因而 ξ，η，a 和 γ 全是自然数；与假设矛盾。

(iv) 这时显见 ξ，η，a 和 γ 是自然数，与假设矛盾。

(v) 显然。

由上容易推出方程 (10) 无超限序数解 a，ξ，η 与 γ。

我们还可以把定理 2 叙述如下：

设 $\gamma>1$，$\xi>1$，$\eta>0$ 和 $a>0$ 是序数且不同时是自然数，则方程 (10) 当 $a\neq 2$ 及 a 和 ξ 不同时是第一类超限序数时无解。

可注意的是，当 a 和 ξ 是第一类超限序数时 (ii) 有解，例如

$$a=\omega^{a_1}2a_1+\omega^{a_2}a_2+\cdots+\omega^{a_{k-1}}a_{k-1}+2,$$

$$\xi=\omega^{a_1}a_1+\omega^{a_2}+\cdots+\omega^{a_{k-1}}a_{k-1}+2,$$

$$\eta=\omega^{a_1}2a_1+\omega^{a_2}a_2+\cdots+\omega^{a_{k-1}}a_{k-1}+1$$

就满足方程 (10)。

§3

在定理 1 中假定条件下方程

$$\xi^{\gamma}=\eta^{\gamma+1} \tag{11}$$

解的问题以下述定理表示：

定理 3. 方程 (11) 当

a) γ 是大于 1 的自然数时有超限序数解 ξ 和 η；

b) γ 是第二类超限序数时对于 $\eta>1$，无序数解；对于

$\eta=1$ 有序数解。

c) γ 是第一类超限序数时有序数解。

定理 3 的证明。

a) 的证明。例如有序数解

$$
\begin{aligned}
\xi = {} & \omega^{a_{n\gamma+1}(n+1)}a_1 + \omega^{a_{n\gamma+1}n+a_{n\gamma+2}}a_2 + \cdots + \\
& + \omega^{a_{n\gamma+1}n+a_{(n+1)\gamma-1}}a_{k-1} + \omega^{a_{n\gamma+1}n+a_{(n-1)\gamma}}a_\gamma + \eta\cdot a_k, \\
\eta = {} & \omega^{a_{n\gamma+1}n}a_1 + \omega^{a_{n\gamma+1}(n-1)+a_{n\gamma+2}}a_2 + \cdots + \\
& \omega^{a_{n\gamma+1}(n-1)+a_{(n+1)f-1}}a_{\gamma-1} + \omega^{a_{n\gamma+1}(n-1)+a_{(n+1)\gamma}}a_\gamma + \\
& + \omega^{a_{n\gamma+1}(n-1)}a_1a_k + \omega^{a_{n\gamma+1}(n-2)+a_{n\gamma+2}}a_2 + \cdots + \\
& + \omega^{a_{n\gamma+1}(n-2)+a_{(n+1)\gamma-1}}a_{\gamma-1} + \omega^{a_{n\gamma+1}(n-2)+a_{(u+1)\gamma}}a_\gamma \\
& \omega^{a_{u\gamma+1}(n-2)}a_1a_k + \cdots + \omega^{a_{u\gamma+1}+a_{n\gamma+2}}a_2 + \cdots + \\
& + \omega^{a_{n\gamma+1}+a_{(n+1)\gamma-1}}a_{\gamma-1} + \omega^{a_{u\gamma+1}+a_{(u+1)\gamma}}a_\gamma + \omega^{a_{n\gamma+1}}a_1a_k \\
& + \omega^{a_{n\gamma+2}}a_2 + \cdots + \omega^{a_{(n+1)\gamma-1}}a_{\gamma-1} + \omega^{a_{(n+1)\gamma}}a_\gamma + a_k,
\end{aligned}
$$

其中 γ 是自然数。

b) 的证明。当 $\eta=1$ 时，显然有解 $\xi=n$，n 为任一自然数。今假定 $\eta>1$。

(i) 当 ξ 和 η 是超限序数时，假若方程 (11) 有解，则利用 §2 的 a) 和 b) 可得

$$\omega^{a_1\cdot\gamma}=\omega^{\beta_1\cdot\gamma}\cdot\eta, \tag{12}$$

其中 β_1 是 η 正常表示式的第一项的指数。比较 (12) 两端系数则有 $\eta=1$，这与 η 是超限序数矛盾。

(ii) 当 ξ 和 η 是自然数时，假若方程 (11) 有解，则利用 §2 的 c) 可得

$$\omega^x=\omega^x\cdot\eta. \tag{13}$$

比较两端系数，则有 $\eta=1$，与 $\eta>1$ 矛盾。

(iii) 当 ξ 是自然数而 η 是超限序数时，假若方程 (11)

有解，就有

$$\omega^{x} = \omega^{\beta_1 \cdot \gamma_x} \eta. \tag{14}$$

比较两端系数，则有 $\eta=1$，也与 η 是超限序数矛盾。

(iv) 当 ξ 是超限序数而 η 是自然数时，假若方程 (11) 有解，就有

$$\omega^{\alpha_1 \gamma} = \omega^{x} \cdot \eta. \tag{15}$$

比较两端系数，则有 $\eta=1$，仍与假定矛盾。

于是 b) 得到证明。

c) 的证明。设第一类超限序数 $\gamma = \omega^{\delta_1} d_1 + \omega^{\delta_2} d_2 + \cdots + \omega^{\delta_{p-1}} d_{p-1} + n$，

其中关于指数与系数的假定同前。

利用 §2 中 a) 和 b)，对于自然数 ξ 和 η，(11) 式变成 $\omega^{x} \cdot \xi^{n} = \omega^{x} \eta^{n+1}$。于是 (11) 的解为

$$\xi = s^{n+1}, \quad \eta = s^{n}, \tag{16}$$

其中 s 为任意自然数。

对于 ξ 和 η 是超限序数，(11) 式变成

$$\omega^{\alpha_1 \gamma} \xi^{n} = \omega^{\beta_1 \gamma} \eta^{n+1}.$$

于是 (11) 的解为：

$$\xi = t^{n+1}, \quad \eta = t^{n},$$

其中 t 是任意的一个超限序数 (a) 的例子也是 (11) 的解，实际计算也是满足的。

依据 a)，b) 和 c) 的证明，定理 3 证明完毕。

在 §3 末尾，对于 α 和 ξ 是第一类超限序数所举(ii)的解的例子是它们的展开式项数相等，对于项数不等的情形尚未解决。

最后须要指出，本文是在王成堂老师亲切的指导与帮助下完成的，在此特别表示感谢。

参 考 文 献

[1] Sierpinski W., Lecons sur les nombres transfinis, Paris, 1950.

[2] Sierpinski W., Sur l'equation $\xi^2=\eta^3+1$ pour les nombres ordinaux transfinis, *Fund. Math.*, 43, 1 (1956), 1—2.

[3] 王成堂、王克显，《关于序数方程》，《数学进展》3, 4(1957), 646—649.

[4] Bachman H., Transfinite Zahlen, Berlin, Göttingen Heidelberg, Springer, 1955, 52—57.

ON SOME EQUATIONS OF ORDINAL NUMBERS(II)

Wang Ke-xian

Abstract

Generalizing the results of [3], it has been pro-ved:

(1) If $\gamma>1$, then for not simultaneously natural numbers ξ, η and γ the equation $\xi^\gamma=\eta^{\gamma+1}+1$ has no solution.

(2) Let $\nu>1$, $\xi>1, \eta>0$ and $\alpha>0$ be ordinal numbers not all natural, then the equation $\xi^\nu\cdot\alpha=\eta^{\nu+1}+1$ under any one of the following conditions has no solution:

(i) γ is a transfinite ordinal.

(ii) γ is a natural number, α and ξ are not isolated simultaneously.

(iii) Both γ and $\alpha \neq 2$ are natural numbers.

(iv) Both γ and η are natural numbers.

(v) γ, ξ and α are natural numbers.

Similar discussions are made for the equation $\xi^{\gamma} = \eta^{\gamma+1}$.

有限序与有限拓扑

王尚志　　指导教师　王戌堂

摘　要

近年来，研究有限集合上数学结构的离散数学正在迅速地发展。“有限群”、“图论”、“有限序”“有限拓扑”等等都引起了人们的兴趣。(1)～(5)这篇短文将证明：有限集合X上的序结构与拓扑结构是1-1对应的，这样就把“有限序”和“有限拓扑”的研究统一起来了。

1° 拓扑序、序拓扑

设 (X,T) 是拓扑空间。

定义： $\forall x,\ y\in X$，u_x，u_y分别是 x、y 的邻域系。

若 $u_x=u_y$，称 x、y 互粘，记 $x\longleftrightarrow y$。

若 $u_x\subset u_y$，称 x 粘于 y，记 $x<y$。

若 $u_x\not\subset u_y$，$u_y\not\subset u_x$，称 x、y 分离，记 $x\nmid y$。

显然有：

命题 1：关于"$\leftrightarrow$"是等价关系，"$<$"是传递关系。

于是，$(X,<)$形成了一个拟序集。称做拓扑空间(X,T)的拓扑序。

我们可以不困难地用"邻域基"、"闭包"等各种基本拓扑概念来描述拓扑序"$\rightarrow$"例如：

命题 2：1) $x\leftrightarrow y$ 当且仅当$\{x\}^-=\{y\}^-$，

2) $x<y$ 当且仅当$\{x\}^-\subset\{y\}^-$，

3) $x\nleftrightarrow y$ 当且仅当$\{x\}^-\not\subset\{y\}^-$，$\{y\}^-\not\subset\{x\}^-$。

另外，设 $(X,<)$ 是个拟序集，$\forall x\in X$，令$\check{x}=\{y: y>x\}$。则不难证明：

命题 3：$\{\check{x}: x\in X\}$是 X 上某一拓扑的基底。

我们称这个拓扑为 $(X,<)$上的固有序拓扑。当$|X|\geqslant\omega_0$时，拓扑序和序拓扑的意义不大，而当 X 为有限时，将有以下结果。

2° 有限序与有限拓扑关系

定理 设 X 是有限集，(X,T) 是拓扑空间。则：1) T 是 (X,T) 的拓扑序的序拓扑。

2) 若 f 是 (X,T) 与 (Y,T) 的同胚映射，则 f 亦是 (X,T) 的拓扑序与 (Y,T') 的拓扑序的序同构。

3) 若 f 是有限序 $(X,<)$ 与 $(Y,<')$ 的序同构，则 f 亦是它们序拓扑的同胚。

4) X 的拓扑结构与 X 的序结构是1-1对应的。

为了证明简洁，先说明有限拓扑空间一些明显的事实，每一点 x 都有最小的开邻域，称为点 x 的基本基，记作 B_x。于是，不难证明：$x<y$ 当且仅当 $B_y\subset B_x$。若 $(X,<)$ 是有限拟序则有，$\forall x\in X$，$B_x=\check{x}$。

证明：1)

$\forall x\in X$，B_x必然包含x粘于的所有的点，而不包含x不粘于的所有的点。不妨设x粘于的点集为V，则$V=B_x$。

$\forall y\in V=B_x$，依拓扑序定义，$y\in \overset{\triangledown}{x}$。反之，$y\in \overset{\triangledown}{x}$，则$y\in V=B^x$，故$\overset{\triangledown}{x}=B_x$。

从而，说明了T即是(X,T)的拓扑序的序拓扑。

2)

设f：$(X,T)\to(Y,T')$是同胚。首先，f是X与Y间的1-1对应，以下只须$\forall x$，$x'\in X$，

$u_x\subset u_{x'}$ 当且仅当 $u_{f(x)}\subset u_{f(x')}$。

由于f是同胚这是显然的，又由拓扑序的定义有：$x<x'$当且仅当$u_x\subset u_{x'}$

$f(x)<'f(x')$当且仅当 $u_{f(x)}\subset u_{f(x')}$

于是 $x<x'$ 当且仅当 $f(x)<'f(x')$。

从而f是$(X,<)$与$(Y,<')$的序同构。

3) 设f是$(X,<)$与$(Y,<')$的序同构。

从而，$\forall x$，$x'\in X$，

$x<x'$ 当且仅当 $f(x)<'f(x')$

于是：$f(\overset{\triangledown}{x})=\overset{\triangledown'}{f(x)}$

即$f(B_x)=B_{f(x)}$，从而f是$(X,<)$与$(Y,<')$的序拓扑的同胚。

4) 由定义与2)可知：有限集X的拓扑决定了X上唯一的序结构，反之由命题3与3)可知：X的每一个序拓扑又决定了X唯一的拓扑，于是，X的拓扑结构与X上的序结构是1-1对应的。 （证毕）

定理反映了有限序和有限拓扑的关系，它的意义在于，对

有限集合而言，可以用序的方法来讨论拓扑问题，反之亦可以用拓扑的方法研究序的问题；并且可以说每一个拓扑性质都对应着一个相应的序性质，而每一个序性质亦对应着一个相应的拓扑性质。

参考文献

[1] J. A. Bondy and U. S. R. Murty
Graph Theory With Applications (New book)

[2] M. C.Mccord: Singular homology group and homotopy groups of finite topological space
Notice Amer Math Soc Vol 12 (1965) p622

[3] M. C.Mccord: Singular homology group and homotopy groups of finite topological space
Duke Math J 33 (1966) 465~474 MR33 4930

[4] R. E. Stong: Finite topology space
Trans Amer Math Soc 123 (1966] 325—340. MR33 3247

[5] Melvin. C. Thornton
Semirings of Fuctions Determine Finite To-Topologies
Proc Amer Math Soc Vol 34 307~310 (1972)

FINITE ORDER AND FINITE TOPOLOGY

Wang Shang-zhi

Abstract

Recetly many people have very been interested in the various structure of finite set, example: finite

group, graph, finite order and finite topology, In this short article we proof that there is one-one function between finite order and finite topology structure. This theorem can join the research of finite order and finite topology.

膨胀算子及其不动点定理*

王尚志　李伯渝　高智民

指导教师　王戍堂

摘　要

B. E.Rhoades 在[1]中总结了若干类压缩型映射，并讨论了它们的不动点定理。本文对于某些压缩型映射给出了相应的膨胀型映射的定义，证明了它们的不动点存在定理，并讨论了不动点集的简单结构和不动点集势

本文中若不加说明，X 表示完备的距离空间，f 为 X 到自身的映射。

对任意的 X 中元素 x，y：

$\overline{d}=d(f(x),\ f(y))$，$d_1=d(x,\ f(x))$，

$d_2=d(y,\ f(y))$，$d_3=d(x,\ f(y))$，

$d_4=d(y,\ f(x))$，$d_5=d(x,\ y)$，

*本文发表于《数学进展》第 11 卷第 2 期（1982）。

B. E. Rhoades 在 [1] 中归纳了 250 种压缩型映射的定义，分析了它们之间的关系，并给出较一般的不动点定理。250 种压缩型映射又是从 25 种基本的压缩型映射派生出来的，而在 25 种基本定义中，都是用 $d_i(i=1, 2, 3, 4, 5)$ 的各种形式来控制 $\overline{d}$。大致可以分成三类：一类是给各 d_i 乘以非负系数 a_i，其和$\geqslant\overline{d}$，而各系数之和小于 1。例如 (1) 型：存在 a，$0\leqslant a<1$，使 $\forall x, y\in X$ 有 $\overline{d}\leqslant ad_5$。(7) 型映射为：存在非负数 a, b, c，满足 $a+b+c<1$，而 $\forall x \cdot y\in X$，有：$\overline{d}\leqslant ad_1+bd_2+cd_5$。第二类是用某些 d_i 的最大值来控制 $\overline{d}$，例如：存在 $0\leqslant h<1$，使对任意 x, $y\in X$，有：$\overline{d}\leqslant \max\{d_1, d_2, d_5\}$。第三类是将第一类映射定义中 a_i 看成 $d(x, y)$ 的单降函数。本文对应以上几种压缩型映射给出相应的膨胀型映射。

定义 1 若存在常数 $a>1$，$\forall x, y\in X$：

$$\overline{d}\geqslant ad_5, \tag{1}$$

则称 f 为第一型膨胀映射。

定义 2 若存在非负常数 a, b, c 满足：

$$a+b+c>1, \tag{2}$$

且 $\forall x\in X, y\in X, x\neq y$,

$$\overline{d}\geqslant ad_1+bd_2+cd_5, \tag{3}$$

则称 f 为第二型膨胀映射。

定义 3 若存在常数 $h>1$，$\forall x, y\in X$,

$$\overline{d}\geqslant h\min\{d_1, d_2, d_5\}, \tag{4}$$

则称 f 为第三型的膨胀映射。

和压缩型映射不同，若不对映射附加条件，不能保证膨胀映射的不动点存在。如实数空间到其自身的映射：

$$f(x)=\begin{cases}2x-1\,(x\leqslant 0),\\ 2x+1\,(x>0),\end{cases}$$

是一个第一型的膨胀映射，但因 $f(x)$ 与 $y=x$ 无交点，故它无不动点。所以，在以下定理中增加一个条件：f 为满映射，即 $\mathbf{X}$ 中每个元素都有原像存在。

定理 1 若 f 是第一型膨胀映射且是满映射，则 f 有唯一的不动点。

证 首先来说明 f 有逆映射存在。

若 $x\neq y$，而 $f(x)=f(y)$ 代入 (1) 得

$$0\geqslant ad(x, y),$$

这与 $ad(x, y)>0$ 矛盾。由于 f 每点原像唯一（又由于 f 是满的），故 f 是 $\mathbf{X}\to\mathbf{X}$ 的一一对应映射，故逆映射存在设为 g，$\forall x, y\in X$，将 $g(x)$，$g(y)$ 代入 (1) 得

$$d(x, y)\geqslant ad(g(x), g(y)),$$

$$d(g(x), g(y))\leqslant\frac{1}{a}d(x, y).$$

其中 $0<\frac{1}{a}<1$，g 满足压缩映射原理，g 有唯一不动点 x_0，$g(x_0)=x_0$，$x_0=f(g(x_0))=f(x_0)$，故 x_0 也是 f 的唯一不动点。

定理 2 若 f 是第二型膨胀型映射，且是满映射，则 f 一定有不动点。

证 $\forall x_0\in \mathbf{X}$，它在 f 下的原像存在，取它的一个原像 x_1。再继续取 x_1 的原像 x_2，…。这样就得到点列 $\{x_n\}$，使 $x_{n-1}=f(x_n)$。不妨假设对任意 $n=1, 2, \cdots$，$x_{n-1}\neq x_n$，因一旦对某个 n 等号成立，它就是 f 的不动点，问题就解决了。由 (3) 式，

$$d(x_{n-1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n+1})) \geqslant ad(x_{n-1}, x_n) + \\ + bd(x_n, x_{n+1}) + cd(x_n, x_{n+1})$$

或

$$(1-a)d(x_{n-1}, x_n) \geqslant (b+c)d(x_n, x_{n+1}).$$

若 $b+c=0$，则 $a>1$，那么上式说明一个负数$\geqslant 0$，所以必有 $b+c\neq 0$，显然还有 $1-a>0$。则

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant hd(x_{n-1}, x_n),$$

其中 $h=\dfrac{1-a}{b+c}$。根据条件(2)，$0<h<1$。类似于压缩映象原理之证明、点列$\{x_n\}$收敛于一点 z。

设 z 在 f 下的原像为 $\bar{z}$，即 $z=f(\bar{z})$。显然$\{x_n\}$不会最后总等于 z，至少经常地不等于 z，所以不妨假设对任意的 $n, x_n\neq z$，那么

$$d(x_n,z) = d(f(x_{n+1}), f(\bar{z})) \geqslant ad(x_n,x_{n+1}) + bd(z,\bar{z}) + \\ + cd(x_{n+1}, \bar{z}).$$

$n\to\infty$时上式左边趋于 0，则

$$bd(z,\bar{z}) = 0, \tag{5}$$

$$cd(x_{n+1},\bar{z}) \to 0 \quad (n\to\infty). \tag{6}$$

已证 $b+c\neq 0$，即 b，c 不能同时为0。若 $b\neq 0$，由 (5) 得 $z=\bar{z}$。若 $c\neq 0$，由 (6) 得 $d(x_{n+1},\bar{z})\to 0$ 或 $x_{n+1}\to\bar{z}$。由极限的唯一性仍有 $z=\bar{z}$。所以 z 是 f 的不动点。

定理 3 连续的满的第三型膨胀算子 f 一定有不动点。

证 类似于定理 2 可得到点列 $\{x_n\}$，$x_{n-1}=f(x_n)$，且不妨假设 $x_{n-1}\neq x_n$。由 (4) 得

$$d(x_{n-1},x_n) = d(f(x_n), f(x_{n+1})) \\ \geqslant h\min\{d(x_{n-1},x_n)d(x_n,x_{n+1})\}. \tag{7}$$

上式右边最小值不能取 $d(x_{n-1}, x_n)$ 因若对某个 n，最小值取到 $d(x_{n-1}, x_n)$，将有

$$d(x_{n-1}, x_n) \geqslant hd(x_{n-1}, x_n) \text{ 或 } h \leqslant 1,$$

发生矛盾。于是由 (7) 得

$$d(x_{n-1}, x_n) \geqslant hd(x_n, x_{n+1}) \text{ 或 } d(x_n, x_{n+1}) \leqslant h' d(x_{n-1}, x_n),$$

其中 $h' = \frac{1}{h}$，且 $0 < h' < 1$。类似于压缩映象原理的证明，$\{x_n\}$ 收敛于一点 z。

由 f 的连续性，$f(x_n) \to f(z)$。但同时 $f(x_n) = x_{n-1} \to z$。由极限的唯一性，$f(z) = z$，即 z 为 f 的不动点。

注　从定理 2 和定理 3 的证明可以看出，为了保证不动点存在，并不需要那么强的条件，有下列条件就足够了：存在某一个点 $x_0 \in X$，可以不断地取原像而得到 $\{x_n\}$，f 在点列 $\{x_n\}$ 及其极限 z 上满足二、三类膨胀映象的条件。对于定理 3 也只需要求 f 在点 z 是连续的。

以上，在某些条件下证明了三类膨胀映象不动点的存在性，并解决了第一型膨胀映象不动点的唯一性。二、三型膨胀映象对应的压缩映象的不动点是唯一的。这一结论对于膨胀映象来说是无法证明的（如果不增加条件的话）。例如恒等映象，同时它又是第三型的膨胀映象，但每个点都是它的不动点。因此我们必须去研究二、三型膨胀映象不动点集的构造与不动点的个数。在这方面有下述结果。

定理 4　满的第二型膨胀映象 f 的不动点集 G 是个闭集。

证　若 x_0 是 G 的聚点，则存在点列 $\{x_n\} \subset G$，$x_n \neq x_0$，且 $x_n \to x_0$。因 f 是满的，必存在 $\overline{x} \in X$，使 $f(\overline{x}) = x_0$。至少对于充分大的 n，$x_n \neq \overline{x}$，于是由 (3)，

$$d(x_n, x_0) = d(f(x_n), f(\overline{x})) \geqslant bd(\overline{x}, x_0) + cd(x_n, \overline{x}),$$

$$d(x_0, x_n)=d(f(\bar{x}), f(x_n))\geqslant ad(\bar{x}, x_0)+cd(x_n, \bar{x}),$$

由于 $n\to\infty$ 时 $d(x_n, x_0)\to 0$，而 a，b，c 不能同时为 0，则

$$d(\bar{x}, x_0)=0 \text{ 和 } d(x_n, \bar{x})\to 0,$$

至少有一个成立。前者成立时立即得到 $\bar{x}=x_0$。后者成立时得到 $x_n\to\bar{x}$。但又有 $x_n\to x_0$，则也有 $\bar{x}=x_0$，代入 $f(\bar{x})=x_0$，得 $f(x_0)=x_0$，即 $x_0\in G$。

定理 5 连续的满的第三型膨胀映象 f 的不动点集 G 是闭集。

证 设 $\{x_n\}\subset G$，$x_n\to x_0$。由 f 的连续性，

$$f(x_n)\to f(x_0)$$

但同时 x_n 是 f 的不动点，则

$$f(x_n)=x_n\to x_0。$$

于是 $f(x_0)=x_0$，即 $x_0\in G$。

第二型膨胀映象在 $c>1$ 时就是第一型膨胀映象，其不动点是唯一的。下面主要研究 $c\leqslant 1$ 时它的不动点个数。

引理 设 f 是 $0<C\leqslant 1$ 的第二型膨胀映象，而且是 $X\to X$ 的一一对应，其逆映象记为 g。x 为 f 的不动点，E_x 为一切在 g 作用下迭代收敛于 x 的点构成之集，即

$$E_x=\{y: g^n(y)\to x, n\to\infty\}.$$

那么，若 E_x 有聚点的话，只有唯一的聚点 x。

证 设 x_0 是 E_x 的聚点，则存在 $\{x_k\}\subset E_x$，$x_k\neq x_0$，且 $x_k\to x_0(k\to\infty)$。由于 f 和 g 都是一一对应，由 $x_k\neq x_0$ 可得 $g(x_k)\neq g(x_0)$ 于是

$$d(x_k, x_0)=d(fg(x_k), fg(x_0))\geqslant ad(x_k, g(x_k))+ \\ +bd(x_0, g(x_0))+cd(g(x_k), g(x_0)) \quad (8)$$

(8) 式左边在 $k\to\infty$ 时趋于 0，又 $c>0$，则

$$d(g(x_k),\ g(x_0))\to 0 \text{ 或 } g(x_k)\to g(x_0)\ (k\to\infty).$$

由于 $c\leqslant 1$，则 a，b 不同时为 0。若 $b\neq 0$，得

$$d(x_0,\ g(x_0))=0 \text{ 或 } g(x_0)=x_0. \tag{9}$$

若 $a\neq 0$，则 $d(x_k,\ g(x_k))\to 0\ (k\to\infty)$，注意到 $k\to\infty$ 时 $g(x_k)\to g(x_0)$，$x_k\to x_0$，则仍有结论 (9)。这样一来，

$$g(x_k)\to x_0\ (k\to\infty).$$

显然，$g(x_k)\neq g(x_0)=x_0$。重复上述过程得

$$g^2(x_k)\to x_0\ (k\to\infty).$$

从而得到下述关系

$$\begin{array}{ccccc}
x_1, & g(x_1), & \cdots, & g^n(x_1), & \cdots\to x\\
x_2, & g(x_2), & \cdots, & g^n(x_2), & \cdots\to x\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
x_k, & g(x_k), & \cdots, & g^n(x_k), & \cdots\to x\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
x_0 & x_0 & & x_0 &
\end{array} \tag{10}$$

对于每个固定的 k，类似于定理 2 的证明，

$$d(g^n(x_k),\ g^{n+1}(x_k))\leqslant hd(g^{n-1}(x_k),\ g^n(x_k)),$$

其中 $0<h=\dfrac{1-a}{b+c}<1$。再类似于压缩映象原理的证明，对任意自然数 n 和 p。

$$d(g^n(x_k),\ g^{n+p}(x_k))<\frac{h^n}{1-h}d(x_k,\ g(x_k)). \tag{11}$$

因 $k\to\infty$ 时 $x_k\to x_0$，$g(x_k)\to x_0$，则 $d(x_k,\ g(x_k))\to 0$。于是序列$\{d(x_k,\ g(x_k))\}$是有界的，即存在常数 $M>0$，对任意的 k 有

$$d(x_k,\ g(x_k))\leqslant M.$$

由（11），

$$d(g^n(x_k);\ g^{n+p}(x_k))<\frac{h^n M}{1-h}.$$

这说明（10）中各迭代向 x 收敛（$n\to\infty$）时对 k 是一致的。即对任意 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，对于一切 k 都成立

$$d(g^n(x_k),\ x)<\varepsilon. \tag{12}$$

取一个固定的 $n>N$，在（12）中令 $k\to\infty$ 可得

$$d(x_0,\ x)\leqslant\varepsilon.$$

再由 ε 的任意性，$x_0=x$。

定理6 X 是 Banach 空间，t 是 $0<c\leqslant1$ 的第二型膨胀映象，且是 $X\to X$ 的一一对应，那么 t 的不动点是非可数的。

证 设 t 的逆映象为 g。若 t 的不动点集为 $\{x_n\}$，其中 n 取有限或可数。设 E_n 为 X 中一切在 g 作用下迭代收敛于 x_n 的点构成的集合。由定理 2 的证明可以看出，X 中任意一点在 g 下的迭代必收敛于某一不动点，则必属于某一个 E_n，于是

$$X=\bigcup_n E_n.$$

根据 Baire 定理，至少有一个 E_n 在某一球 S 中是稠密的。

我们断言，S 中每个点都属于 E_n。因若 $y\in S$，而 $y\notin E_n$，则 y 必为 E_n 的聚点。由引理将有 $y=x_n\in E_n$，发生矛盾。注意到 X 是个线性赋范空间，则 S 中每个点都是 S 的聚点，因而就是 E_n 的聚点。由引理，S 中每个点都等于 x_n，则球 S 中只有一个点了，这对于线性赋范空间来说是不可能的。于是 t 的不动点集是非可数的。

感谢北京大学数学系冷生明教授、西北大学数学系王戍堂教授、栗延龄讲师、西安冶金学院数学教研室颜心力老师对本文的指导和审阅。

参 考 文 献

[1] Rhoads B. E. , A Comparision of Various Definitions of Contractive Mappings, *Transactions of the Amarican Mathematical Society*, Whole 226: 501 (1977) , 257—290.

[2] 南京大学编，泛函分析，人民教育出版社，(1961).

SOME FIXED POINT THEOREMS ON EXPANSION MAPPINGS

Wang Shang-zhi Li Bo-yu Gao Zhi-min

Abstract

B. E. Rhoades summarized the contraction mapping of some types, and discussed the theorems of its fixed point in [1] , In the note, we shall define expansion mappings which correspond some contraction mappings, prove the existence of its fixed point, and discuss the simple construction and cardinal unmber of the set of fixed points.

用映射建立一些空间间的关系

高智民　　指导教师　王戍堂

摘　要

第一可数公理是点集拓扑学中重要概念之一。近年来，满足第一可数公理的空间被作过多种推广，本文用映射建立了这些空间类的关系。

满足第一可数公理的拓扑空间具有许多重要的性质。许多拓扑工作者对之作过大量的研究。E. Michael. R. C. Olson 等人曾讨论了第一可数公理的多种推广，得出了一系列的结果（[1]、[2]）。

本文用映射来描述这些推广空间间的关系，得到了一系列较整齐的结果。文中所述的映射是连续到上的，且所提空间均满足T_1分离性。

一、定　义

定义 1.1　设 $S\subset$ 拓扑空间 X，X 的下降子集列 (S_i) 称

为 S 列，若 $x_i \in S_i$、则列 (x_i) 在 S 中有聚点。

定义 1.2 对每一$p \in X$，若存在 p 的开邻域组成的 S-列 (S_i)，当 $S=\{p\}$时，X 是第一可数的；当 S 分别是紧集、可数紧集、X 时，则 X 称为点可数、强 q、q空间。

定义 1.3 X 中一滤子基$\mathscr{F}$聚集于 p（即 $p \in \overline{F}, F \in \mathscr{F}$），若存在 S-列 (S_i) 与$\mathscr{F}$啮合（即 $i \in \omega$，$F \in \mathscr{F}$，则 $S_i \cap F \neq \phi$），则分别当 $S=\{p\}$、S 是紧集、S 是可数紧集、$S=X$ 时，X 分别是双序列式、双 K 式、双半 K 式、相对双半 K 式。

定义 1.4 当 (F_i) 是聚集于 $p \in X$ 的下降列、若存在聚集于 p 的 S 列 (S_i) 使得 $S_i \subset F_i$，则当 $S=\{p\}$时，X 是可数双序列式；S 是紧集时，X 是可数双 K 式；S 是可数紧集时，X 是可数双半 K 式；$S=X$ 时，X 是相对可数双半 K 式。

定义 1.5 当 $p \in \overline{F}$ 时，若存在聚集于 p 的 S 列 (S_i) 使得 $S_i \subset F$，则当 S 分别是$\{p\}$、是紧集、是可数紧集、是 X 时，X 分别是 Frechet 空间、单个双 K 空间、单个双半 K 空间、相对单个双半 K 空间。

定义 1.6 当 F 不闭时，若存在 $p \in \overline{F}-F$ 和聚集于 p 的 S 列 (S_i) 使得 $S_i \subset F$，当 S 分别是$\{p\}$、是紧集、是可数紧集、是 X 时，则 X 分别是序列式、序列式 K、序列式半 K、序列式 q 空间。

定义 1.7 $f: X \to Y$ 是双商映射，若滤子基$\mathscr{F}$聚集于 $y \in Y$，则 $f^{-1}(\mathscr{F})$聚集于某一 $x \in f^{-1}(y)$。

定义 1.8 $f: X \to Y$ 是可数双商映射，若(A_i) 是 Y 中聚集于 y 的下降列，则$(f^{-1}(A_i))$聚集于某一 $x \in f^{-1}(y)$。

定义 1.9 $f: X \to Y$ 是遗传商映射，若 $y \in \overline{A} \subset Y$，则有 $x \in f^{-1}(y)$，使得 $x \in \overline{f^{-1}(A)}$。

定义 1.10 $f:X\to Y$ 是商映射，若 $A\subset Y$ 不闭，则有 $y\in\overline{A}-A$，使得存在 $x\in f^{-1}(y)$，$x\in\overline{f^{-1}(A)}$。

二、结　果

定理 2.1 Y 是双 K 空间，当且仅当存在点可数空间 X 和双商映射 f，使得 $f(X)=Y$。

定理 2.2 Y 是可数双 K 空间，当且仅当存在点可数空间 X 和可数双商映射 f，使得 $f(X)=Y$。

定理 2.3 Y 是单个双 K 空间，当且仅当存在点可数空间 X 和遗传商映射 f，使得 $f(X)=Y$。

定理 2.4 Y 是双半 K 空间，当且仅当存在强 q 空间 X 和双商映射 f，使得 $f(X)=Y$。

定理 2.5 Y 是可数双半 K 空间，当且仅当存在强 q 空间 X 和可数双商映射 f，使得 $f(X)=Y$。

定理 2.6 Y 是单个双半 K 空间，当且仅当存在强 q空间 X 和遗传商映射 f，使得 $f(X)=Y$。

定理 2.7 Y 是单个双 K 空间，当且仅当存在可数双 K 空间 X 和遗传商映射 f，使得 $f(X)=Y$。

定理 2.8 Y 是序列式 K 空间，当且仅当存在可数双 K 空间 X 和商映射 f，使得 $f(X)=Y$。

定理 2.9 Y 是单个双半 K 空间，当且仅当存在可数双半 K 空间 X 和遗传商映射 f，使得 $f(X)=Y$。

定理 2.10 Y 是序列式半 K 空间，当且仅当存在可数双半 K 空间 X 和商映射 f，使得 $f(X)=Y$。

定理 2.11 Y 是相对单个双半 K 空间，当且仅当存在相对可数双半 K 空间 X 和遗传商映射 f，使得 $f(X)=Y$。

定理 2.12 Y 是序列式 q 空间，当且仅当存在相对可数双半 K 空间 X 和商映射 f，使得 $f(X)=Y$.

定理 2.13 Y 是序列式 K 空间，当且仅当存在单个双 K 空间 X 和商映射 f，使得 $f(X)=Y$.

定理 2.14 Y 是序列式半 K 空间，当且仅当存在单个双半 K 空间 X 和商映射 f，使得 $f(X)=Y$.

定理 2.15 Y 是序列式 q 空间，当且仅当存在相对单个双半 K 空间 X 和商映射 f，使得 $f(X)=Y$.

三、证　明

3.1 定理 2.1 的证明：设 X 是点可数空间，f 是双商映射．设 Y 中一滤子基 $\mathscr{F}$ 聚集于 p，由于 f 的性质，则 $f^{-1}(\mathscr{F})=\{f^{-1}(F);\ F\in\mathscr{F}\}$ 聚集于某一 $x\in f^{-1}(y)$．对此 x，存在 x 的开邻域组成的 S-列 (S_i)，S 是紧集且 $S\subset\bigcap\{S_i;\ i\in\omega\}$，由于 f 连续，故 $f(S)$ 是紧集，且 $(f(S_i))$ 是 $f(S)$-列．

对于 $F\in\mathscr{F}$ 和 $f(S_i)$，因为 $S_i\cap f^{-1}(F)\neq\phi$，推知 $f(S_i)\cap F\neq\phi$，即 $\mathscr{F}$ 与 $f(S)$ 列 $(f(S_i))$ 啮合，所以 Y 是双 K 空间．

下证相反的情形．首先我们给出一个构造．设 (A_i) 是某一拓扑空间 T 的单调下降子集列，我们在 T 上构造新的拓扑结构如下：

对于 $t\in T$，其基本开集形如 $U\cap(\{t\}\cup A_i)$，其中 $t\in U$ 且 U 在 T 的原拓扑中开，易知上述形成 T 的拓扑，记此拓扑空间为 $T(A_i)$．关于 $T(A_i)$，有下列性质：

a) 恒等映射 i: $T(A_i)\rightarrow T$ 是连续的．

b) 若 $t\in T$，$i\in\omega$，则 $\{t\}\cup A_i$ 在 $T(A_i)$ 中是开集．

c) 若 $F\subset T$，则

$\cap\{A_i\cap F$ 在 T 中的闭包；$i\in\omega\}$

$=\cap\{A_i\cap F$ 在 $T(A_i)$ 中的闭包；$i\in\omega\}$.

d) 若 $a_i\in A_i$，且 a 是 (a_i) 在 T 中的聚点，则也是在 $T(A_i)$ 中的聚点。

e) 若 T 是 T_2 的，则 $T(A_i)$ 也是 T_2 的。

f) $\cap\{A_i;\ i\in\omega\}$ 上的两个相对拓扑是一致的。

现在转入证明。设 Y 是双 K 空间，对每一 $y\in Y$ 和聚集于 y 的滤子基 $\mathscr{F}$、取与 $\mathscr{F}$ 啮合 的 $S(y,\ \mathscr{F})$ 列 $(S_i(y,\ \mathscr{F}))$，其中 $S(y,\ \mathscr{F})$ 是 Y 中的一个紧集。

定义 $Y(y,\ \mathscr{F})=Y(S_i(y,\ \mathscr{F})\cup S(y,\ \mathscr{F}))$ 如上述，令 $X=\bigoplus_{(y,\mathscr{F})}Y(y,\ \mathscr{F})$。由 $f|_{Y(y,\mathscr{F})}$ 是恒等映射来定义 f: $X\to Y$，由 a) 知，f 是连续到上的。

下证 X 是点可数的。若 $p\in X$，则 $p\in$ 某一 $Y(y,\mathscr{F})$，据性质 b)，$\{p\}\cup S_i(y,\ \mathscr{F})\cup S(y,\ \mathscr{F})\}$ 在 $Y(y,\ \mathscr{F})$ 中是开集，从而在 X 中是开集，由于 $(S_i(y,\ \mathscr{F}))$ 在 Y 中是 $S(y,\mathscr{F})$ 列，而且 $S(y,\ \mathscr{F})$ 是 Y 中的紧集，故在 Y 中，$(\{p\}\cup S_i(y,\ \mathscr{F})\cup S(y,\ \mathscr{F}))$ 是 $S(y,\ \mathscr{F})\cup\{p\}$ 列。由性质 d)，知 $(\{p\}\cup S_i(y,\ \mathscr{F})\cup S(y,\ \mathscr{F}))$ 在 $Y(y,\ \mathscr{F})$ 中也是 $S(y,\ \mathscr{F})\cup\{p\}$ 列。

另外，$S(y,\ \mathscr{F})$ 在 Y 中是紧集。事实上，据性质 f)，由于在 $\cap\{S_i(y,\ \mathscr{F})\cup S(y,\ \mathscr{F})\}$ 上相对拓扑一致（作为 Y 的子空间和作为 $Y(y,\ \mathscr{F})$ 的子空间），故在 $S(y,\ \mathscr{F})$ 上相对拓扑也一致，所以 $S(y,\ \mathscr{F})$ 作为 $Y(y,\ \mathscr{F})$ 的子集是紧的。于是知 X 是点可数的。

进而证明 f 是双商映射。设 $\mathscr{F}$ 是 Y 中聚集于 y 的滤子基，因对每一 $F\in\mathscr{F}$，列 $(S_i(y,\ \mathscr{F})\cap F)$ 聚集中 $y\in Y$（注意在

此我们可取 $\mathscr{F}\cup\{y$ 的邻域$\}$代替 $\mathscr{F}$），由性质 c）知（$f^{-1}(S_i(y,\ \mathscr{F}))\cap Y(y,\ \mathscr{F})\cap f^{-1}(F)$）聚集于 $y\in Y(y,\ \mathscr{F})$，故 $f^{-1}(\mathscr{F})$聚集于 $y\in Y(y,\ )\mathscr{F}$。所以 f 是双商映射。　　讫

3.2　定理 2.2 的证明：设X是点可数型空间，$f: X\to Y$是可数双商映射，若（A_i）是聚集于 $p\in Y$ 的下降集列，由 f 的定义，$(f^{-1}(A_i))$聚集于某一 $x\in f^{-1}(p)$。因 X 点可数，对于 x，设（S_i）是 x 的开邻域组成的 S-列且紧集 $S\subset\cap\{S_i;\ i\in\omega\}$，显然，$(f(S_i))$是 $f(S)$列且 $f(S)$ 在 Y 中紧，从而知 $(f(S_i)\cap A_i)$也是 $f(S)$列。

设 V 是含 p 的任一开集，则 $f^{-1}(v)\cap S_i$ 是 x 的邻域，所以 $f^{-1}(V)\cap S_i\cap f^{-1}(A_i)\neq\phi$，故 $V\cap f(S_i)\cap A_i=V\cap(f(S_i)\cap A_i)\neq\phi$，此推知$(f(S_i)\cap A_i)$聚集于 p，所以 Y 是可数双 K 空间。

下证相反的情形。设 Y 是可数双 K 空间，对每一 $y\in Y$ 和聚集于 y 的下降列（A_i），选取 $S(y,(A_i))$列$(S_i(y,(A_i)))$ 使得 $S_i(y,\ (A_i))\subset A_i$ 对每一 i 成立，且$(S_i(y,\ (A_i)))$聚集于 y，$S(y,\ (A_i))$是一紧集。

定义 $Y(y,\ (A_i))=Y(S_i(y,\ (A_i))\cup S(y,\ (A_i)))$ 如前述，令 $X=\bigoplus_{(y,(A_i))}Y(y,\ (A_i))$，$f: X\to Y$ 由 $f|_{Y(y,(A_i))}$ 是恒等映射来定义，则性质 a）表明 f 是连续到上的。

X 是点可数的，事实上，若 $p\in X$，则 $p\in$ 某一 $Y(y,(A_i))$；据性质 b），$\{p\}\cup S_i(y,\ (A_i))\cup S(y,(A_i))$在 X 中是开集。由性质 d)知$(\{p\}\cup S_i(y,\ (A_i))\cup S(y,\ (A_i)))$是 $S(y,(A_i))\cup\{p\}$列，这是因为$S(y,\ (A_i))$在 Y 中是紧集，并由性质 f）知 $S(y,\ (A_i))$在 $Y(y,\ (A_i))$中紧。从而$S(y,\ (A_i))\cup\{p\}$ 在 X 中紧，故 X 是点可数的。

再证 f 是可数双商映射。设 (A_i) 是 Y 中聚集于 y 的下降列，考虑 $y\in Y(y,(A_i))$，即 $\{y\}=f^{-1}(y)\cup Y(y,(A_i))$，设 $U\cap(\{y\}\cup s_i(y,(A_i))\cup s(y,(A_i))$ 是 X 中关于 y 的基本开集（U 在 Y 中开，且 $y\in U$，见上述构造），因 $(S_i(y,(A_i)))$ 聚集于 $y\in Y$ 且 $S_i(y,(A_i))\subset A_i$，所以存在 $x\in U\cap S_i(y,(A_i))\subset U\cap A_i$（此在 Y 中成立），故

$x\in f^{-1}(A_i)\cap(U\cap(\{y\}\cup S_i(y,(A_i))\cup S(y,(A_i))))$ 在 X 中成立，此意味着 $y\in\overline{f^{-1}(A_i)}$ 对每一 i 成立，所以 $(f^{-1}(A_i))$ 聚集于 y，故 f 是可数双商映射。讫。

3.3 定理 2.3 的证明：设 X 是点可数型空间，$f:X\to Y$ 是遗传商映射，设 $p\in\bar{F}\subset Y$，由 f 的定义，则有 $x\in f^{-1}(p)$ 使得 $x\in\overline{f^{-1}(F)}$。因 X 点可数，对 x，设 (S_i) 是 x 的开邻域组成的 S 列且紧集 $S\subset\cap\{S_i;i\in\omega\}$，显然 $(f(S_i))$ 是 $f(S)$ 列且 $f(S)$ 在 Y 中紧，从而 $(f(S_i)\cap F)$ 也是 $f(S)$ 列。

设 V 是含 p 的任一开集，则 $f^{-1}(V)\cap S_i$ 是 x 的邻域，所以 $f^{-1}(V)\cap f^{-1}(F)\cap S_i\neq\phi$。此推出 $V\cap f(S_i)\cap F\neq\phi$，故 $(f(S_i)\cap F)$ 聚集于 p，所以 Y 是单个双 k 空间。

下证相反的情形，设 Y 是单个双 k 空间，对每一 $A\subset Y$，取 $y\in\bar{A}$ 和聚集于 y 的 $S(y,A)$ 列 $(S_i(y,A))\subset A$，$S(y,A)$ 在 Y 中是紧集。定义 $Y(y,A)=Y(S_i(y,A)\cup S(y,A)$ 如前述，并令 $X=\bigoplus_{y,A}Y(y,A)$，$f:X\to Y$ 由 $f|_{Y(y,A)}$ 是恒等映射来定义，由性质 a）知 f 连续到上。

下证 X 点可数。若 $p\in X$。则 $p\in$ 某 $-Y(p,A)$，由性质 b），$\{p\}\cup s_i(y,A)\cup s(y,A)$ 在 $Y(y,A)$ 中开，从而于 X 中开，由性质 d）、f）知，$\{p\}\cup S_i(y,A)\cup S(y,A)$ 是 $S(y,A)\cup\{p\}$ 列，而且 $\{p\}\cup S(y,A)$ 在 X 中紧，故 X 点可数。

再证 f 是遗传商映射．设 $y\in\overline{A}\subset Y$，考虑 $y\in Y(y,A)$，设 $U\cap(\{y\}\cup S_i(y,A)\cup S(y,A))$ 是 X 中关于 y 的基本开集（其中 $y\in U$，U 在 Y 中开），因 $(s_i(y,A))$ 聚集于 $y\in Y$，所以存在 $x\in Y$，使得

$$x\in U\cap S_i(y,A)\subset U\cap A$$

在 Y 中成立，从而

$$x\in f^{-1}(A)\cap(U\cap(\{y\}\cup S_i(y,A)\cup S(y,A)))$$

在 X 中成立，故 $y\in\overline{f^{-1}(A)}$在 X 中成立，所以，f 是遗传商映射．　　　　　　　　　　　　　　　　讫

3.4　定理 2.4、2.5、2.6 的证明：注意到在 T_1空间中，一个集可数紧当且仅当其任一无穷子集至少有一聚点。分别仿定理 2.1、2.2、2.3 即可．讫．

3.5　定理2.8、2.13的证明：因为点可数⇒可数双 k⇒单个双 k⇒序列式 K，并且仿上述可以证明：Y 是序列式 k 空间当且仅当存在点可数空间 X 和商映射 f，使得 $f(X)=Y$，所以我们仅证序列式 k 空间 X 的商象 Y 仍是序列式 k 空间。

设 A 在 Y 中不闭，因 f 是商映射，则存在 $y\in\overline{A}-A$，存在 $x\in f^{-1}(y)$ 使得 $x\in\overline{f^{-1}(A)}$．由于 $f(x)=y\overline{\in}A$，故 $f^{-1}(A)$ 在 X 中不闭，由于 X 是序列式 k 空间，则有 $p\in\overline{f^{-1}(A)}-f^{-1}(A)$ 和聚集于 p 的 S–列 (S_i) 使得$S_i\subset f^{-1}(A)$ 且S 在 X 中是紧的。另一方面，由于 $\overline{f^{-1}(A)}\subset f^{-1}(\overline{A})$、故 $f(p)\in\overline{A}$ 且 $p\overline{\in}f^{-1}(A)$，所以 $f(p)\in\overline{A}-A$．$f(s_i)\subset A$ 显然，且 $f(s)$ 在 Y 中是紧集。以下说明 $(f(S_i))$ 是 $f(S)$ 列且 $(f(S_i))$ 聚集于 $f(p)$．事实上，任取 $y_i\in f(s_i)$，则有 $x_i\in S_i$，使得 $y_i=f(x_i)$，而 (x_i) 在 S 中有聚点，则 (y_i) 在 $f(S)$ 中有

聚点（因 f 连续到上），此表明 $(f(S_i))$ 是 $f(S)$ 列。又因 $p\in\overline{S_i}\subset f^{-1}(\overline{f(S_i)})$，故 $f(p)\in\overline{f(S_i)}$，即 $(f(S_i))$ 聚集于 $f(p)$。故 Y 是序列式 k 空间。 讫

3.6 定理 2.10、2.14 的证明：可以证明，Y 是序列式半 k 当且仅当存在 X 和 f 使的 $f(X)=Y$，其中 X 是强 q 空间且 f 是商映射。

因为强 $q\Rightarrow$ 可数双半 $k\Rightarrow$ 单个双半 $k\Rightarrow$ 序列式半 k，故只需证明序列式半 k 空间的商象仍是序列式半 k。而此类似于 3.5。 讫

3.7 定理2.12、2.15 的证明：因为 q 空间是相对可数双半 k 空间，而后者又是相对单个双半 k 空间，且又是序列式 q 空间。加之可以证明：Y 是序列式 q 当且仅当存在 X 和 f，使得 $f(X)=Y$，其中 X 是 q 空间，f 是商映射。故只须证序列式 q 的商象仍是序列式 q，而此证同上。 讫

3.8 定理 2.7 的证明：因可数双 k 是单个双k，且因定理 2.3，故只须证单个双 k 空间的遗传商象是自身，设 $y\in\overline{A}\subset Y$，因 f 是遗传商映射，则存在 $x\in f^{-1}(y)$ 使得 $x\in\overline{f^{-1}(A)}\subset X$。由于 X 是单个双 K 空间，故存在聚集于 x 的 S 列 (S_i) 使得 $S_i\subset f^{-1}(A)$ 且S是紧集。于是 $(f(S_i))$ 是 $f(S)$ 列，且 $f(S)$ 是紧集，且 $f(S_i)\subset A$。因$x\in\overline{S_i}\subset f^{-1}(\overline{f(S_i)})$，推知$y\in\overline{f(S_i)}$，即 $(f(S_i))$ 聚集于 y。所以 Y 是单个双 K 空间。 讫

3.9 定理 2.9 的证明：因为强 $q\Rightarrow$ 可数双半$K\Rightarrow$ 单个双半 K，且由定理 2.6，仅须证单个双半 K 的遗传商象是自身。证法同上。 讫

3.10 定理 2.11 的证明：因为 $q\Rightarrow$ 相对可数双半$K\Rightarrow$ 相对单个双半 K。而且可以证明：Y 是相对单个双半 K 空间当且

仅当存在 X 和 f，使得 $f(X)=Y$，其中 X 是 q 空间，f 是遗传商映射，故只须证明相对单个双半 K 空间的遗传商象仍是自身即可。而此同 3.8 之证。 讫

参 考 文 献

[1] E. A. Michael A quintuple quotient quest Genenal Topology and Appl. 2 (1972) 91-138

[2] R. C. Olso. Bi-quotient maps, countable bi-sequential spaces and related topics. General Topology and Appl 4(1974), 1-28

[3] A. J. Berner, Spaces defined by sequeces. proc. Amer. Math. soi 1-2(1971)P. 193-200

[4] 江泽涵：《拓扑学引论》，1978年6月，上海科技出版社.

[5] Engelking General Topology 1975. Panstwowe Wydawnictwo Naukowe.

ESTABLISH SOME SPACES RELATIONS BY MEANS OF MAPPING

Gao Zhi-min

Abstract

First countable is of important concept in general topology, and was generalized by different methods. In present paper, we establish their relations by means of mapping.

WOLK 两个定理的推广

李伯渝　　指导教师　王戍堂

摘　要

本文推广了 E. S. Wolk 在文［1］中的定理 3.6 和定理 3.9，并将它们作为本文结果的直接推论。

E. S. Wolk 在[1]中将经典的 Dini 定理推广成

定理 3.6　令 X 是拓扑空间，Y 是半序集，其中全无序集合是有限的，并带有 Dedekind 拓扑。$\{f_n : n \in D\}$ 是 X 到 Y 的函数网，它点态收敛于函数 $f \in Y^X$，且对于每个 $x \in X$，Y 中网 $\{f_n(x) : n \in D\}$ 是单调增加的，若每个 f_n 和 f 连续，则 $\{f_n : n \in D\}$ 在 X 上连续收敛于 f。

这里，半序集的子集称为全无序的是指，其中每两点都不可比较；拓扑空间 X 到 Y 的函数网 $\{f_n : n \in D\}$ 在 X 上连续收敛于 $f \in Y^X$ 是指：对于任意 $x \in X$ 及 X 中收敛于 x 的网 $\{x_m : m \in E\}$，Y 中的网 $\{f_n(x_m) : (n, m) \in D \times E\}$ 收敛于 $f(x)$。Dedekind 拓扑是半序集中一种固有拓扑。设 P 为半序

集。若$S\subseteq P$，且对任意x，$y\in S$，都有$z\in S$使$x\leqslant z$，$y\leqslant z$，称S为上定向集合，类似地有下定向集合的概念。若$K\subseteq P$且K中任意上（下）定向子集在其上（下）确界存在时必属于K，那么称K为Dedekind闭集。P中所有Dedekind闭集可以构成某个拓扑的闭集族，称它为P的Dedekind拓扑。

Wolk在证明了这个定理后指出，有例子说明，若将值域空间Y的全无序子集有限性条件去掉后，此定理将不成立。他认为将Y的拓扑取作Dedekind拓扑是不自然的。接着就提出这样的问题：是否可用另外一些拓扑代替Y中的Dedekind拓扑，使定理3.6去掉Y的全无序集合有限性条件后仍然能成立？

我们将指出，用区间拓扑代替Dedekind拓扑就可以解决这个问题，并把定理3.6作为我们结果的直接推论。

定理1. 若值域空间Y中拓扑T存在一个子基$\mathbf{B}$，满足下列条件：对任意$B\in\mathbf{B}$．至少具备下列条件之一：

(i) $y_1\in B$．$y_2\geqslant y_1\Rightarrow y_2\in B$；

(ii) $y_1\in B$．$y_2\leqslant y_1\Rightarrow y_2\in B$．

那么将Y的全无序子集有限性条件去掉后定理3.6依然成立。

证明：令$x\in X$，而X中网$\{x_m: m\in E\}$收敛于x．我们将证明Y中网$\{f_n(x_m):(n,m)\in D\times E\}$收敛于$f(x)$．为此只需说明，对任意$B\in\mathbf{B}$．$f(x)\in B$，该网最后在$B$中即可。

假设B满足条件(i)。由$\{f_n(x): n\in D\}$收敛于$f(x)$，将存在$N\in D$，使$n\geqslant N$时$f_n(x)\in B$。根据f_n的连续性和$f_n(x)\in B$，存在$M\in E$，使$m\geqslant M$时$f_N(x_m)\in B$。再由$\{f_n: n\in D\}$的单调性，对于$n\geqslant N$和$m\geqslant M$，

$$f_n(x_m) \geqslant f_N(x_m) \in B.$$

由于 B 满足条件 (i)， $(n,m) \geqslant (N,M)$ 时 $f_n(x_m) \in B$，即 $\{f_n(x_m) : (n,m) \in D \times E\}$最后在 B 之中。

下设 B 满足条件 (ii) 。根据 f 的连续性，存在 $M \in E$，使 $m \geqslant M$ 时 $f(x_m) \in B$。我们断言，对任意 $m \geqslant M$ 和 $n \in D$，$f_n(x_m) \in B$。这将说明 $\{f_n(x_m) : (n,m) \in D \times E\}$最后在 B 中。假设不然，即存在 $m_0 \geqslant M$ 和 $n_0 \in D$，使得 $f_{n_0}(x_{m_0}) \overline{\in} B$. 根据网$\{f_n(x_{m_0}) : n \in D\}$ 的单调性，当 $n \geqslant n_0$ 时，$f_n(x_{m_0}) \geqslant f_{n_0}(x_{m_0})$. 由于 B满足条件 (ii) ,$f_n(x_{m_0}) \overline{\in} B$。而$\{f_n(x_{m_0}) : n \in D\}$点态收敛于 $f(x_{m_0})$，则 $f(x_{m_0}) \overline{\in} B$，发生矛盾。

O.Frink 在 [3] 中定义了半序集 P 中的区间拓扑。对于任意 $a \in P$，集合

$$(-\infty,\ a] = \{x \in P : x \leqslant a\} \text{和} [a,\ +\infty) = \{x \in P : x \geqslant a\}$$

称为闭射线。p 中以所有闭射线为闭集族子基的拓扑称为 P 的区间拓扑。

显然，若在定理 1 中 Y 的拓扑取成区间拓扑，它将满足有关的条件，于是有

定理 2 . 定理 3.6 中若将 Y 中 Dedekind 拓扑换成区间拓扑，则该定理去掉 Y 中全无序子集有限性条件后依然成立。

T. Naito[4]和 R. W. Hansell[5]都证明了：若半序集的全无序子集都是有限的，那么它的区间拓扑和 Dedekind 拓扑是一样的。于是，定理 3.6 可视为定理 2 的直接推论。

E. S. Wolk 在[1]中还证明了

定理3.9 令 X 和 Y 都是半序集，且它们的全无序子集都是有限的，都带有 Dedekind 拓扑。设 $\{f_n : n \in D\}$ 是 X 到

Y 的函数网，它点态收敛于连续函数 $f\in Y^X$。若

（1）每个 f_n 都是单调增加的函数；

（2）对于每个 $x\in X$，$f(x)=Sup\{f_n(x):n\in D\}$，

那么在 X 上 $\{f_n:n\in D\}$ 连续收敛于 f。

我们将对此定理作类似于前一个定理的推广，即将此定理中 X 与 Y 的 Dedekind 拓扑都换成区间拓扑，去掉 Y 中全无序子集有限的条件，并将（ii）减弱成 $f(x)$ 是 $\{f_n(x):n\in D\}$ 的上界，那么定理 3.9 依然成立。而且可把定理 3.9 作为我们结果的直接推论。

定理 3．设在定理 3.9 中 Y 带有拓扑 $\mathbf{T}$，它满足定理 1 中的条件，X 中带有拓扑 τ，满足下列条件：

（iii）当 X 中单调上升（下降）的网收敛于某点时，该点必是该网的上界（下界）。

那么将定理 3.9 中 Y 的全无序子集有限的条件去掉，并将条件 $f(x)=Sup\{f_n(x):n\in D\}$ 减弱成 $f(x)$ 是 $\{f_n(x):n\in D\}$ 的上界，定理3.9依然成立。

证明：设 $x\in X, B\in \mathbf{B}$，且 $f(x)\in B$：X 中网 $\{x_m:m\in D\}$ 收敛于 x。我们将证明 Y 中网 $\{f_n(x_m):(n,m)\in D\times E\}$ 最后在 B 之中。

先设 B 满足条件（ii）。利用 f 的连续性，存在 $M\in E$，使 $m\geqslant M$ 时 $f(x_m)\in B$。根据 $f(x_m)$ 是 $\{f_n(x_m):n\in D\}$ 的上界和 B 满足条件（ii），对任意 $m\geqslant M$ 和 $n\in D$，有 $f_n(x_m)\in B$，即 $\{f_n(x_m):(n,m)\in D\times E\}$ 最后在 B 之中。

下面主要考虑 B 满足（i）的情况。先证明以下结果：

1°若 $\{x_m:m\in E\}$ 是单调的，那么 $\{f_n(x_m):(n,m)\in D\times E\}$ 最后在 B 之中。

设$\{x_m: m\in E\}$是单调增加的。利用f的连续性，存在$M\in E$，使$m\geqslant M$时$f(x_m)\in B$。特别有$f(x_M)\in B$。由于$\{f_n(x_M): n\in D\}$收敛于$f(x_M)$，存在$N\in D$，使$n\geqslant N$时$f_n(x_M)\in B$。利用$\{x_m: m\in E\}$是单调增加的和每个f_n是单调增加的，当$m\geqslant M$和$n\geqslant N$时，

$$f_n(x_m)\geqslant f_n(x_M)\in B.$$

而B满足条件 (i) 保证了这时$f_n(x_m)\in B$。

设$\{x_m: m\in E\}$是单调下降的。利用$\{f_n(x): n\in D\}$收敛于$f(x)$，存在$N\in D$，使$n\geqslant N$时$f_n(x)\in B$。根据 (iii)，对于每个$m\in E$，$x_m\geqslant x$。再利用f_n的单调性，对$n\geqslant N$和$m\in E$，

$$f_n(x_m)\geqslant f_n(x)\in B。$$

于是B满足条件 (i) 保证了这时$f_n(x_m)\in B$。

这就完成了1°的证明。下面要去掉$\{x_m: m\in E\}$单调的假设来证明$\{f_n(x_m): (n,m)\in D\times E\}$最后在$B$中。

假设不然，即有在$D\times E$的一个共尾子集F，使

$$\{f_n(x_m): (n,m)\in F\}\subseteq Y-B。$$

定义函数S: $F\to D$和T: $F\to E$如下：对任意$(n,m)\in F$，令

$$S(n,m)=n,\ T(n,m)=m.$$

显然S和T都是单调增加的，而且由F在$D\times E$中共尾可得S和T的值域分别在D和E中共尾。所以

$$\{f_{S(n,m)}: (n,m)\in F\}和\{x_{T(n,m)}: (n,m)\in F\}$$

分别是$\{f_n: n\in D\}$和$\{x_m: m\in E\}$的子网。根据[5]定理2，$\{x_{T(n,m)}: (n,m)\in F\}$有单调子网，即存在定向集$L$和函数$R$: $L\to F$，使网$\{x_{T\circ R(k)}: k\in L\}$是它的单调子网。那么$\{f_{S\circ R(k)}: k\in L\}$是$\{f_{S(n,m)}: (n,m)\in F\}$的子网，也是

$\{f_n : n \in D\}$的子网。

显然 $\{f_{S\circ R(k)} : k \in L\}$ 和 $\{x_{T\circ R(k)} : k \in L\}$ 满足本定理 $\{f_n : n \in D\}$和$\{x_m : m \in E\}$所满足的一切条件。运用已证明的结论 1° 可得：Y 中的网

$$\{f_{S\circ R(k_1)}(x_{T\circ R(k_2)}) : (k_1 k_2) \in L \times L\}$$

最后在 B 之中，显然 $L \times L$ 的对角线 $\triangle = \{(k,k) : k \in L\}$ 在 $L \times L$ 中是共尾的，那么网

$$\{f_{S\circ R(k)}(x_{T\circ R(k)}) : k \in L\}$$

也将最后在 B 之中。

但另一方面，对于每个 $k \in L$，$R(k) \in F$，且 $R(k) = (S_\circ R_{(k)}、T_\circ R_{(k)})$，那么 $f_{S\circ R(k)}(x_{T\circ R(k)}$属于$\{f_n(x_m) : (n,m) \in F\}$的值域，则

$$\{f_{S\circ R(k)}(x_{T\circ R(k)}) : k \in L\} \subseteq Y - B.$$

这个矛盾就证明了

2°，在 B 满足条件 (i) 时，若$\{x_m : m \in E\}$ 收敛于 x_1 则 $\{f_n(x_m) : (n,m) \in D \times E\}$最后在 B 之中。

这就证明了定理 3。

现让定理 3 中两个拓扑都取成区间拓扑。Y 中的区间拓扑满足定理 1 中条件是显然的。而根据 Naito 和 Hansell 的结果和[1]中引理 3.3，X 中区间拓扑也满足定理 3 中条件 (iii)。于是我们有：

定理 4. 在定理 3.9 中将 X，Y 的 Dedekind 拓扑都换成区间拓扑，去掉 Y 中全无序子集有限的条件，将条件 $f(x) = S_{up}\{f_n(x) : n \in D\}$减弱成 $f(x)$ 是$\{f_n(x) : n \in D\}$的上界，那么定理 3.9 依然成立。

仍根据 Naito 和 Hansell 的结论，Wolk 的定理 3.9 可视

为定理 4 的直接推论。

参 考 文 献

[1] E. S. Wolk, Continuous Convergence in partially ordered sets, General Topology and its Applications, 5(1975), 221-234.

[2] E. S. Wolk, Order-Compatible Topologies on a partially order Set, proc. Amer. Math. soc. 9(1958-59) 524-529.

[3] O. Frink, Topology in Lattices, Trans. Amer. Math. Soc., 51(1942), 568-582.

[4] T. Naito, On a problem of Wolk in interva Topologies. proc. Amer. Math. soc., 11(1960), 156 158.

[5] R. W. Hansell, Monotone Subnets in partially Ordered Sets, proc. Amer. Math. Soc., 18(1967). 854 858.

THE GENERALIZATIONS OF WOLK'S TWO THEOREMS

Li Bo-yu

Abstract

In this paper we generalize wolk's Theorems 3.6 and 3.9 in[1], and make them become immediate corollaries of our results.

丢番图方程及其推广方程的超限序数解（II）*

胡 庆 平　　指导教师王戍堂

摘 要

在本文中，作者在[1]的基础上继续研究丢番图方程及其推广方程的超限序数解．本文的主要结果是定理1，定理5和定理6．作者在本文中已较完整地研究了一般的丢番图方程(1)及其变形方程的超限序数解问题．

作者在文献[1]中研究了丢番图方程 $x^4=1+Dy^2$（D为自然数）及其七种变形方程和两类推广方程的超限序数解问题．本文在超限序数的范围内研究更一般的方程

$$x^{\alpha}=Dy^{\beta}+q, \tag{1}$$

其中α、β为任意的序数，而D、q为自然数．本文是在文献[1]的工作基础上进一步的工作，且推广了文献[2—5]的工作，

*本文发表于《科学通报》第18期（1981）．

把波兰著名数学家Sierpinski[2] 首先提出的二元三项式序数方程解的问题，作了较为系统的研究。

我们先研究当 $\alpha=m$，$\beta=n$ 皆为自然数的情形。不妨设 m，$n\neq1$（否则其解是显然的）。我们有下面：

定理 1. 方程(1)在 $\alpha=m$，$\beta=n$ 且皆不等于 1 时没有超限序数解.

证. 方程(1)在 $D=1$ 时即为 $x^m=y^n+q$，此时 m、n、q 皆为自然数，且 m，$n\neq1$. 由文献[5]的一个定理知，此方程没有超限序数解. 当 $D\neq1$ 时，方程(1)如果有解，则 i)x一定是孤立数；ii) y 不会是极限数. 事实上，由方程(1)，i是显然的. 对 ii 来讲，如果 ii 不真，那么 y 是极限数，显然方程(1)可变为 $x^m=y^n+q$，从而无超限数解，故造成矛盾. 这样，当 $D\neq1$ 时，方程(1)的解可设为孤立数 x 和 $y=\eta+\mathscr{N}$，其中 η 为极限数，而$\mathscr{N}$为自然数. 于是，可有

$$x^m=D(\eta+\mathscr{N})^n+q,$$

化简之即得

$$x^m=y^n+(D-1)\mathscr{N}+q.$$

此方程无超限数解. 这与假设矛盾.

由定理1，我们可以得出下列推论：丢番图方程 $x^4=Dy^2+q$ 没有超限序数解，其中 D、q 为自然数；Pell 方程 $x^2=Dy^2+q$ 没有超限序数解，其中 D、q 为自然数；方程 $x^n=Dy^n+q$（n、D、q 为自然数）当且仅当 $n=1$ 时才有超限序数解. 在 $\alpha=m$，$\beta=n$ 皆为自然数时，方程(1)有七种变形方程，我们在这里只给出下列主要结果：

定理 2. 方程 $x^m+q=Dy^n$ 在 $D=1$ 时没有超限序数解；在 $D\geqslant2$，若 $D-1\nmid q$ 无超限数解，而在 $D-1\mid q$ 时有解 x

$=(\xi+\mathscr{N})^n$，$y=(\xi+\mathscr{N})^m$，其中 ξ 为任意的极限数，而

$$\mathscr{N}=\frac{q}{D-1}.$$

定理 3. 方程 $x^m=y^nD+q$ 没有超限序数解.

定理 4. 方程 $x^m+q=y^nD$ 当 $D=1$ 时没有超限序数解；当 $D\geqslant 2$ 且仅当 $D-1|_q$ 时有超限数解(如有解，一定是超限孤立数解).

在研究一般的丢番图方程(1)之前，我们先给出几个序数常用计算公式. 关于 x^n(x 为超限数，n 为自然数) 可见文献 1,3].

引理 1. 设 x 为任一超限数，η 为任一极限数，则

$$x^\eta=\omega^{a_1\eta},\tag{2}$$

其中 a_1 是 x 的正常表示的首项指数.

引理 2. 设 x 为孤立数

$$x=\omega^{a_1}\alpha_1+\omega^{a_2}\alpha_2+\cdots+\omega^{a_{k-1}}\alpha_{k-1}+\alpha_k,\tag{3}$$

其中 $a_1>a_2>\cdots>a_{k-1}>0$；而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 是自然数. 又设 η 为孤立超限数：

$$\eta=\overline{\eta}+\mathscr{N},\tag{4}$$

其中 η 为极限数，$\mathscr{N}$ 为自然数，则

$$\begin{aligned}x=&\ \omega^{a_1\eta}\alpha_1+\omega^{a_1(\eta-1)+a_2}\alpha_2+\cdots+\omega^{a_1(\eta-1)+a_{k-1}}\alpha_{k-1}\\&+\omega^{a_1(\eta-1)}\alpha_1\alpha_k+\omega^{a_1(\eta-2)+a_2}\alpha_2+\cdots+\\&+\omega^{a_1(\eta-2)+a_{k-1}}\alpha_{k-1}+\omega^{a_1(\eta-2)}\alpha_1\alpha_k+\cdots\\&+\omega^{a_1(\overline{\eta}+1)+a_2}\alpha_2+\cdots+\omega^{a_1(\overline{\eta}+1)+a_{k-1}}\alpha_{k-1}+\\&\omega^{a_1(\overline{\eta}+1)}\alpha_1\alpha_k+\omega^{a_1\overline{\eta}+a_2}\alpha_2+\cdots+\omega^{a_1\overline{\eta}+a_{k-1}}\alpha_{k-1}\\&+\omega^{a_1\overline{\eta}}\alpha_k.\end{aligned}\tag{5}$$

引理 3. 设 x 为极限数

$$x = \omega^{\alpha_1} a_1 + \omega^{\alpha_2} a_2 + \cdots + \omega^{\alpha_k} a_k, \tag{6}$$

其中 $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_k > 0$；而 a_1，a_2，…，a_k 为自然数。又设 η 为孤立超限数(4)式，则

$$x^\eta = \omega^{\alpha_1 \eta} a_1 + \omega^{\alpha_1(\eta-1)+\alpha_2} a_2 + \cdots + \omega^{\alpha_1(\eta-1)+\alpha_k} a_k. \tag{7}$$

这三个引理用序数的运算及 x^η 的计算公式不难得出。由这三个引理，我们可以得出下列：

定理 5. 当 x 和 η 皆为超限数时，则 x^η 一定是极限数。

现在，我们来研究方程(1)。我们有下列：

定理 6. 当 α、β 中至少有一个极限数时，方程(1)有超限数解 $\Longleftrightarrow \alpha = 1$，$\beta$ 为极限数，且解为 $x = \eta^\beta + q$，$y = \eta$，其中 η 为任意的超限数。当 α、β 为不等于 1 的孤立数时，方程 (1) 没有超限序数解。

证. 对于 α，β 至少有一个为极限数时，由 x^η 的计算公式及引理 1 不难知道，方程(1)有解，则 α 不能是超限数和不等于 1 的自然数，而当 $\alpha = 1$ 时，方程(1) 有解为 $x = \eta^\beta + q$，$y = \eta$，其中 η 为任意的超限数。

对于 α，β 皆为不等于 1 的孤立数的情况，我们应当考虑四种情况：1) α，β 皆为自然数；2) α 为超限孤立数，β 为自然数；3) α、β 皆为超限孤立数；4) α 为自然数，β 为超限孤立数。

对于情况 1)，我们已在定理 1 中进行了研究。对于情况 2)、3)，由定理 5 可知方程(1)没有超限序数解。对于情形 4)，如果 $\alpha \neq 1$，β 为超限孤立数，方程(1)有超限数解，那么由定理 5 知，$Dy^\beta = y^\beta$，故方程(1)可变成 $x^\alpha = y^\beta + q$，这与文献[5]中的一个定理矛盾。证完。

我们可以按指数中至少有一个极限数及两个 (α，β) 皆为

超限孤立数的情况，分别讨论方程(1)的七种变形方程的超限序数解。我们在这里列出以下主要结果：

定理 7. 方程 $x^{\alpha}+q=Dy^{\beta}$ 当 α、β 至少有一个为极限数时有极限数解$\Longleftrightarrow\beta=1$，$\alpha$ 为极限数，$D|q$，且解为 $x=\eta=\omega^{s_1}\alpha_1+\cdots$，$y=\omega^{s_1}\alpha_1+\frac{q}{D}$，其中 η 为任意的超限数；当 α 或 β 中任一个为超限孤立数，而另一个为不等于 1 的孤立数时，没有极限序数解。

定理 8. 方程 $x^{\alpha}=y^{\beta}D+q$ 当 α、β 至少有一个为极限数时有超限数解$\Longleftrightarrow\alpha=1$，$\beta$ 为极限数，且解为 $x=\eta^{\beta}D+q, y=\eta$，其中 η 为任意的超限数；当 α、β 为不等于 1 的孤立数时没有超限序数解。

定理 9. 方程 $x^{\alpha}+q=y^{\beta}D$ 当 α、β 中至少有一个为极限数时，有超限数解$\Longleftrightarrow\beta=1,\alpha$ 为极限数，且解为 $x=\eta=\omega^{s_1}a_1+\cdots$，$y=\omega^{s_1}\frac{a_1}{D}+q$，其中 $D|a_1$；当 β 为超限孤立数，α 为孤立数，或当 α 为超限孤立数，而 β 为不等于 1 的孤立数时，此方程无超限序数解；当 α 为超限孤立数，$\beta=1$ 时，此方程有超限序数解。

至此我们已较完整地研究了一般的丢番图方程 (1) 及其变形方程的超限序数解问题。当然，更一般地可以进一步地讨论方程

$$Ax^{\alpha}B=Cy^{\beta}D+q, \tag{8}$$

其中 A、B、C、D、q 为自然数，α、β 为任意的序数及其变形方程的超限序数解问题。利用文献[1]及本文的方法和结果，这样做已不太困难了。

参 考 文 献

[1] 胡庆平：《西北大学学报》（自然科学版），1980，3：36-45.

[2] Sierpinski, W., *Fund. Math.*, XLIII (1956), 1: 1-2.

[3] 王戍堂、王克显：《数学进展》，1957，4：646-649.

[4] 邓崇云：《西北大学学报》（自然科学版），1958，3：85-88.

[5] Swierczkowski, S., *Fund. Math.*, XLV (1958), 3: 213-216.

SOLUTIONS OF DIOPHANTINE EQUATION AND ITS GENERALIZED EQUATIONS IN TRANSFINITE ORDINAL NUMBERS (II)

Hu Qing-ping

Abstract

In this paper, on the base of [1] the author goes on studying the solutions of Diophantine equation and its generalized equations in transfinite ordinal numbers. The main results of the paper are the following:

Theorem 1. When $\alpha = m$, $\beta = n$, and m and n all $\neq 1$, Eq.

$$x^{\alpha} = Dy^{\beta} + q \qquad (1)$$

has not any solutions of transfinite ordinal numbers.

Theorem 5. When x and η are all transfinite or-

dinal numbers, x^{η} must be a limiting number.

Theorem 6. When either of α and β is a limiting number, Eq. (1) has solutions of transfinite numbers $\Longleftrightarrow \alpha = 1$, β is a limiting number, and the solutions are

$$\begin{cases} x = \eta^{\beta} + q, \\ y = \eta, \end{cases}$$

where η is an arbitrary transfinite number. When α and β are all isolated numbers which are not equal to 1, Eq. (1) has not any solutions of transfinite ordinal numbers.

可结合的 BCI 代数*

胡庆平　井关清志

摘　要

本文中，作者引入了结合 BCI-代数的概念，证明了结合 BCI-代数和对合群是一致的，并且得到了结合 BCI-代数的几个特征性质。

1966 年由 Imai 及井关清志一起引进了 BCK 代数，即有下列：

定义 1. 设 X 是具有一个二元运算 * 和一个常元 0 的一个集。那末 X 被称为一个 BCK 代数，是指它满足下列条件：(I) $(x*y)*(x*z)\leqslant z*y$；(II) $x*(x*y)\leqslant y$；(III) $x\leqslant x$；(IV) $0\leqslant x$；(V) $x\leqslant x$, $y\leqslant x\Longrightarrow x=y$；(VI) $x\leqslant y\Longleftrightarrow x*y=0$。

日本、斯里兰卡等国许多数学家，从事对这种代数系的研

*本文由西北大学数学系胡庆平与日本神户大学数学系井关清志合写，发表于《科学通报》1982 年第 12 期。

究，写出了大量的论文，得到了很多结果(文献[1])，本文要用到 BCK 代数的下列两个性质：

(VII) $0 * x = 0$。这由(IV)及(VI)可知。

(VIII) $x * 0 = x$。这个性质可见文献[1]的定理 2。

1966 年井关清志[1]引入了 BCI 代数，即有下列：

定义 2． 一个 BCI 代数是具有下列条件的 (2,0) 型的一个代数 $\langle X;\ *,\ 0\rangle$：

$$[(x * y) * (x * z)] * (z * y) = 0, \tag{1}$$

$$[x * (x * y)] * y = 0, \tag{2}$$

$$x * x = 0, \tag{3}$$

$$x * y = y * x = 0 \Longrightarrow x = y, \tag{4}$$

$$x * 0 = 0 \Longrightarrow x = 0. \tag{5}$$

井关清志在文献[3—6]中研究了 BCI 代数，得到了许多结果，比如，BCI 代数有下列主要性质：

集合$\{x:\ x \geqslant 0\}$ 是一个极大的 BCK 代数 A，它被称为 BCI 代数 X 的 BCK 部分， (6)

$$(x * y) * z = (x * z) * y, \tag{7}$$

$$x * 0 = x. \tag{8}$$

现在我们来研究一类 BCI 代数。

定义 3． 一个 BCI 代数如果满足下列条件：

$$(x * y) * z = x * (y * z), \tag{9}$$

则称为可结合的 BCI 代数。

对于可结合的 BCI 代数，其 BCK 部分特别简单。这由下列定理给出：

定理 1． 可结合的 BCI 代数的 BCK 部分 A 是平凡的，即 $A = \{0\}$。

证．对于任意的$x\in A$，我们由(VII)知$0=0*x$，由(3)式又有$0=(x*x)*x$，由(9)式便得$0=x*(x*x)=x*0$，再由(8)式知，$x=0$，故$A=\{0\}$．$Q.E.D.$

同样地，我们可以称满足条件(9)的BCK代数为可结合的BCK代数．由下列定理知：

定理2． 可结合的BCK代数是平凡的．

证．因为BCK代数X一定是一个BCI代数，其BCK部分即为本身．从而由定理1知，$X=\{0\}$．$Q.E.D.$

可结合的BCI代数有下列重要性质：

定理3． 在可结合的BCI代数$\langle X;*,0\rangle$中，对于任意的$x\in X$有下式

$$0*x=x \tag{10}$$

成立。

证．对于任意的$x\in X$，由(8)式知$x*0=x$．再由(9)式知：对于任意的$z\in X$有$x*z=(x*0)*z=x*(0*z)$．命$z=x$，由上式可得$0=x*x=x*(0*x)$．

另一方面，由(9)式及(3)式可知$(0*x)*x=0*(x*x)=0*0=0$．这样，我们得到

$$x*(0*x)=(0*x)*x=0.$$

由(4)式，我们就有$0*x=x$．$Q.E.D.$

从这个定理可以得到下列：

推论　可结合的BCI代数$\langle X;*,0\rangle$是具有恒等元0的一个半群．

证．X显然非空，且对$*$封闭．由(8)式及(10)式知，0是X中的恒等元．可结合性是已知的．故X是一个半群，且以0为其恒等元．$Q.E.D.$

实际上，我们可以得到更强的结果，即

定理 4. 可结合的 BCI 代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个每个元素皆为对合的一个群。

证. 由于 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个 BCI 代数，故有 (3) 式成立：$x * x = 0$.
此式表明：对于 X 中任意的元素 x，皆以自身为逆元（这样的元素是对合），再由上面推论的性质而知，$\langle X; *, 0\rangle$ 是一个群. $Q. E. D.$

这个定理的逆也成立，即有：任意的群，它的元素皆是对合，即 $x^2 = 1$（对于每个元素），则可被处理为型 $(1,0;0,0)$ 或 $(0,1;0,0)$ 的一个拟-可换的 BCI 代数（文献[4]的定理1）. 由于任意的群满足 (9) 式，故这样的 BCI 代数是可结合的.

现在，我们指出，(10) 式是可结合的 BCI 代数的特征性质. 我们有下列：

定理 5. 一个 BCI 代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 是可结合的$\Longleftrightarrow$对每个 $x \in X$，有 (10) 式成立.

证. 只要证充分性. 由 (1) 式有 $[(0 * y) * (0 * z)] * (z * y) = 0$.

由 (10) 式知，$(y * z) * (z * y) = 0$.
因为 y 和 z 是任意的，从而由 (4) 式推得，

$$y * z = z * y. \tag{11}$$

现在，我们利用 (7) 式及 (11) 式易知：

$$x * (y * z) = (y * z) * x = (y * x) * z = (x * y) * z.$$

这就证得了可结合性 (9) 式. $Q. E. D.$

在这个定理的证明中我们同时得到了下列可结合的 BCI 代数的特征性质：

定理 6. BCI 代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 是可结合$\Longleftrightarrow X$中二元运算 $*$ 是可交换的，即对于 x 中任意的元素 y 和 z，有(11) 式成立.　　　　　　　　　　　　　　Q. E. D

注. 在 BCK 代数理论中，由 Tanaka[1] 引入的可换的 BCK 代数，是满足下列条件的 BCK 代数：

(IX)　　　$x*(x*y)=y*(y*x)$.

文献[3]中定理 2 指出，满足条件(IX)的 BCI 代数一定是一个 BCK 代数. 为了与此相区别，我们称满足条件 (11)式的 BCI 代数为其运算 $*$ 具有可交换性质. 定理 6 指出，可结合的 BCI 代数与运算 $*$ 有交换性质的 BCI 代数是等同的. 由定理 5 及定理 6 可知，对于BCI代数来说，(9) 式$\Longleftrightarrow$(10) 式$\Longleftrightarrow$(11) 式. 关于可结合的 BCI 代数的其它性质，我们将在另文叙述.

参 考 文 献

[1] Iséki, K., Tanaka, S., *Math, Japonica*, 23(1978), 1-26.
[2] Iséki, K., *Proc. Japan Acad.*, 42 (1966), 26-29.
[3] Iséki, K., *Math. Sem. Notes*, 8(1980), 125-130.
[4] Iséki, K., *Math. Sem. Notes*, 8(1980), 181-186.
[5] Iséki, K., *Math. Sem. Notes*, 8(1980), 225-226.
[6] Iséki, K., *Math. Sem. Notes*, 8(1980), 235-236.

THE ASSOCIATIVE BCI-ALGEBRA

Hu Qing-ping, Iseki·K

Abstract

In this paper the authors introduce the conception on

the associative BCI-algebras, i.e. the following:

Definition 3. If a BCI-algebra satisfies following condition:

$$(x * y) * z = x * (y * z),$$

then it is called an associative BCI-algebra.

The results of this paper are the following:

Theorem 4. Any associative BCI-algebra $\langle X; *, 0\rangle$ is a group in which every element is an involution. And the converse of this result holds.

Theorem 5. BCI-algebra $\langle X; *, 0\rangle$ is associative iff for any $x \in X$, $0 * x = x$ is true.

Theorem 6. A BCI-algebra $\langle X; * 0\rangle$ is associative iff in X the binary operation is commutative, i. e. for two arbitrary elements y and z of X, $y * z = z * y$ is true.